



# UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

## TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Polinomiografía

Autor/es

LARA DE JUAN REINARES

Director/es

JOSÉ MANUEL GUTIÉRREZ JIMÉNEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



***Polinomiografía***, de LARA DE JUAN REINARES  
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative  
Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.  
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los  
titulares del copyright.



# **UNIVERSIDAD DE LA RIOJA**

**Facultad de Ciencia y Tecnología**

## **TRABAJO FIN DE GRADO**

**Grado en Matemáticas**

**Polinomiografía**

Realizado por:

Lara de Juan Reinares

Tutelado por:

José Manuel Gutiérrez Jiménez

**Logroño, julio de 2018**



# Resumen

En este trabajo tratamos la polinomiografía, es decir, la representación de polinomios de variable compleja mediante la aproximación de sus raíces a través de funciones iterativas. Empezamos introduciendo la teoría acerca de la iteración de funciones racionales con algunos de sus conceptos y resultados que serán útiles a lo largo del trabajo. También, dedicamos un apartado al estudio los fractales, que suelen ser considerados unos de los primeros polinomiografos, para a continuación centrarnos en la Familia Básica, una de las dos familias de métodos iterativos que existen y en la que se basa generalmente el concepto de polinomiografía. Por último, introducimos la segunda familia y continuamos nuestro análisis comparando el comportamiento y propiedades de ambas familias. Concluimos con un breve estudio de algunas de las aplicaciones científicas y artísticas de la polinomiografía, creando algunos polinomiografos a partir de diferentes características de los polinomios.

# Abstract

In this paper we deal with polynomiography, i.e., the representation of complex polynomials using the approximation of their roots with iterative functions. First we begin introducing the theory about iteration of rational functions and some its results and notions that will be useful further in the text. Besides that, we study the fractals, which are usually considered as a one of the first polynomiographs. After this, we focus on the Basic Family, one of the two families of iterative methods that exist and on which is generally based the concept of polynomiography. Next, we introduce the second family and we continue our analysis by comparing the behaviour and properties of both families. We conclude with a brief study of some of its scientific and artistic applications of polynomiography by creating some polynomiographs based on different characteristics of the polynomials.



# Introducción

El término polinomiografía fue definido por Bahman Kalantari como el arte y ciencia de la visualización de aproximaciones de raíces polinómicas a través de funciones iterativas. La mayoría del trabajo de Kalantari que podemos encontrar hoy en día se basa principalmente en este original concepto, en los fundamentos de esta teoría y sus posibles aplicaciones. Entre dichas aplicaciones, Kalantari enfatiza constantemente el uso de la polinomiografía como recurso didáctico para acercar y facilitar el estudio de los polinomios y la aproximación de raíces a estudiantes de cualquier nivel académico. Pero él también explica que este tipo de visualización de polinomios no está solo restringida a científicos y profesores, sino que también puede ser útil para otro tipo de público, como artistas, permitiéndoles dar un nuevo enfoque a su obra.

Interesados por estas originales y curiosas ideas, decidimos realizar esta memoria acerca de la polinomiografía, utilizando como referencia los resultados y trabajos de Kalantari, en concreto su libro [9]. Para poder estudiar y trabajar eficientemente esta teoría al principio vamos a repasar la iteración de funciones racionales de variable compleja. Además trataremos algunos de los que podríamos considerar los primeros “polinomiografos” o representaciones de polinomios, como por ejemplo los conjuntos fractales de Pierre Fatou y Gastón Julia, quienes increíblemente trataron este tipo de visualizaciones años antes de que existiera la tecnología y el software que utilizamos hoy en día para crear y analizar estas imágenes.

Pese a que en parte de esta memoria nos centraremos en la Familia Básica, familia de métodos iterativos y base de la polinomiografía de Kalantari, también veremos otro tipo de funciones iterativas, comparando y examinando sus comportamientos y propiedades. Todo esto nos permitirá trabajar y constatar algunas de las aplicaciones de estas representaciones, unas serán de carácter más teórico, relacionadas con características de los métodos estudiados, como las cuencas de atracción, la velocidad de convergencia o el plano de parámetros, y otras serán más prácticas, por ejemplo, la encriptación de números. Como es lógico, para poder hacer todo este estudio, iremos realizando estas representaciones gráficas que nos servirán como apoyo para probar todos los resultados y además así poder experimentar de primera mano la creación de los polinomiografos. Se podrían tratar muchos más resultados y aplicaciones acerca de la polinomiografía, pero al ser un tema tan extenso, en esta memoria solo podremos abarcar algunos de ellos, resaltando las observaciones que creemos más interesantes.





# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Iteración de funciones racionales y fractales</b>       | <b>1</b>  |
| 1.1. Introducción . . . . .                                   | 1         |
| 1.2. Fractales . . . . .                                      | 7         |
| <b>2. La Familia Básica de Kalantari</b>                      | <b>13</b> |
| 2.1. Introducción: la Familia Básica . . . . .                | 15        |
| 2.2. Formulaciones equivalentes . . . . .                     | 16        |
| <b>3. Familias de Schröder de primer y segundo tipo</b>       | <b>21</b> |
| 3.1. La familia de Schröder de primer tipo . . . . .          | 21        |
| 3.2. La familia de Schröder de segundo tipo . . . . .         | 23        |
| 3.3. Polinomiografos de las familias de Schröder . . . . .    | 24        |
| 3.4. Código de Mathematica . . . . .                          | 28        |
| 3.5. Galería de imágenes . . . . .                            | 30        |
| <b>4. Otros polinomiografos posibles</b>                      | <b>33</b> |
| 4.1. Polinomiografos según el número de iteraciones . . . . . | 33        |
| 4.2. Expresar números como polinomiografos . . . . .          | 36        |
| 4.3. Plano de parámetros . . . . .                            | 39        |
| 4.4. Galería de imágenes . . . . .                            | 45        |
| <b>5. Conclusiones</b>  | <b>47</b> |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>49</b> |



# Capítulo 1

## Iteración de funciones racionales y fractales

En general, al hablar de polinomiografía, nos referimos a la visualización de ecuaciones polinómicas usando la iteración de funciones para aproximar raíces. Por eso, antes de centrarnos en la Familia Básica, la cual posee útiles propiedades a nivel matemático y algorítmico y desde el punto de vista representativo, vamos a repasar y estudiar algunos conceptos y resultados de la iteración de funciones racionales. En este capítulo, además de destacar las nociones básicas y observaciones que van a ser esenciales a lo largo de este trabajo, también trataremos el concepto de fractal, así como algunos de los ejemplos más conocidos de conjuntos de fractales.

### 1.1. Introducción

Para tener una buena base, vamos a empezar con una definición inicial de función racional a la que le seguirán otros resultados y observaciones que serán útiles más adelante.

**Definición 1.1.** Una **función racional** es una función de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

siendo  $P(z)$  y  $Q(z)$  polinomios de variable compleja, con coeficientes en  $\mathbb{C}$  (el plano complejo) y coprimos, i.e., no tienen raíces comunes. El **grado** de  $P(z)$  se define como:

$$\text{grado}(R) = \max \{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}.$$

Para analizar las propiedades de  $R$  en  $\mathbb{C}$ , debemos considerar la *esfera de Riemann* (o plano complejo extendido), que podemos definir como

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Una razón por la que estamos estudiando las funciones racionales es la interesante dinámica de la iteración del punto fijo,

$$z_n = R(z_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

con  $z_0$  número complejo inicial. También se puede expresar como

$$z_n = R^n(z_0),$$

siendo  $R^n$  la  $n$ -ésima composición de  $R$  consigo mismo.

Al estar analizando la teoría sobre la iteración de funciones racionales, también mencionaremos el concepto de *órbita* de  $R$  en  $z_0$ , que es la secuencia

$$O^+(z_0) = \{z_n = R^n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Ahora vamos a tratar una serie de puntos que tienen un comportamiento diferente y que deberemos tener en cuenta en la iteración de funciones racionales.

**Definición 1.2.** Un **punto fijo** de  $R$  es un punto  $\zeta$  tal que  $R(\zeta) = \zeta$ .

Supongamos que para un complejo dado  $z_0$ , su órbita correspondiente converge a un punto  $\zeta$ . Entonces por la continuidad de  $R(z)$  se puede observar que  $\zeta$  es un punto fijo:

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} z_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} R(z_n) = R(\lim_{n \rightarrow \infty} z_n) = R(\zeta).$$

Esta propiedad ha sido una de las motivaciones detrás de las iteraciones del punto fijo, entre las que podemos encontrar el conocido método de Newton usado para la aproximación de raíces de polinomios. Además de todo esto, los puntos fijos son casos especiales de los puntos periódicos:

**Definición 1.3.** Un **punto periódico** de  $R$  de período  $p \geq 1$  es un punto  $\zeta$  tal que  $R(\zeta)^p = \zeta$  y  $R(\zeta)^k \neq \zeta$  para cualquier  $k < p$ . Entonces un punto fijo también es un punto periódico de período 1.

A cada punto periódico podemos asociarle tres valores, los cuales tienen un papel importante en la dinámica de  $R(z)$ : período  $p$ , multiplicador  $\lambda$  y multiplicidad  $m$ . Para ver la importancia de estos valores vamos a ver la clasificación de los puntos fijos según sea su multiplicador:

**Definición 1.4.** Dado un punto fijo  $\zeta \in \mathbb{C}$ , llamaremos **multiplicador** de  $\zeta$  al valor complejo  $\lambda = R'(\zeta)$ .

Según su multiplicador, podemos diferenciar cuatro tipos de puntos fijos:

- Superatractor si  $\lambda = 0$ .
- Atractor si  $0 < |\lambda| < 1$ .
- Repulsor si  $|\lambda| > 1$ .
- Indiferente si  $|\lambda| = 1$ .

Dentro de los puntos fijos indiferentes podemos distinguir los *racionalmente indiferentes* o *parabólicos*, que son aquellos donde  $\lambda$  es una raíz de la unidad, i.e. existe un número natural  $n$  tal que  $\lambda^n = 1$ . A los demás se les llaman *irracionalmente indiferentes*.

La misma caracterización sirve para un punto periódico  $\zeta$  de período  $p$  cuyo multiplicador es  $\lambda = (R^p)'(\zeta)$ .

Ahora vamos seguir comentando otro de los valores interesantes, la multiplicidad.

**Definición 1.5.** Sea  $\zeta \in \mathbb{C}$  fijo de  $R$ , entonces decimos que tiene **multiplicidad**  $m$  si  $\zeta$  es una raíz de  $F(z) = R(z) - z$  con multiplicidad  $m$ , es decir,  $F^{(j)}(\zeta) = 0$  para  $j = 1, \dots, m-1$ . Si  $m = 1$ , entonces decimos que  $\zeta$  es un **punto fijo simple** de  $R$ .

Al estar trabajando en el plano complejo extendido, debemos considerar la posibilidad de que  $\infty$  pueda ser un punto fijo de  $R$ . Para estudiar esto un poco más detenidamente es muy útil usar las transformaciones de Möbius. Si consideramos la función  $g(z) = \frac{1}{z}$ , vemos que es una transformación de Möbius donde la imagen de  $\infty$  es 0 (y viceversa). Además la inversa de  $g(z)$  es ella misma. Ahora definimos la función

$$S(z) = gRg^{-1}(z) = g(R(g^{-1}(z))) = \frac{1}{R(1/z)}$$

y observamos que si  $R(\infty) = \infty$  entonces  $S(0) = \frac{1}{R(\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$ , por lo que cuando 0 es punto fijo de  $S$ ,  $\infty$  será punto fijo de  $R$ . Además, también podemos ver que

$$S'(0) = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow \infty} R'(z)} = \frac{1}{R'(\infty)},$$

así que se podría generalizar diciendo que la naturaleza de  $\infty$  como punto fijo de  $R$  es la misma que la de 0 como punto fijo de  $S$ , es decir, tienen la misma multiplicidad y el mismo carácter repulsor o atractor.

Sobre lo que acabamos de ver podemos hacer varias observaciones, como por ejemplo, sea un polinomio  $p(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0$  y  $S(z)$  una función definida como  $S(z) = gpg^{-1}(z) =$

$$g(p(1/z)) = \frac{1}{p(1/z)} = \frac{1}{\frac{a_d}{z^d} + \dots + \frac{a_1}{z} + a_0} = \frac{z^d}{a_d + a_{d-1}z + \dots + a_1 z^{d-1} + a_0 z^d}.$$

Observamos que  $S(0) = 0$  y además, si  $d \geq 2$  también se cumple que  $S'(0)' = 0$  y por tanto obtenemos que para polinomios de grado  $\geq 2$ ,  $\infty$  va a ser un punto fijo superatractor.

Otro resultado al que llegamos a partir de lo que hemos explicado anteriormente es el siguiente:

**Proposición 1.1.** *Una función racional de grado  $d \geq 1$  tiene exactamente  $d+1$  puntos fijos, contados con sus multiplicidades.*

*Demostración.* Empecemos suponiendo que  $\text{grado}(R) = d = \text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P)$ . Los puntos fijos de  $R(z)$ , van a ser las raíces de  $R(z) - z = 0$  y por tanto serán las mismas raíces que las de la ecuación  $P(z) - zQ(z) = 0$ . En este caso el número de soluciones va ser el  $\text{grado}(P(z) - zQ(z))$ . Ahora como sabemos que

$$\text{grado}(P(z) - zQ(z)) = \text{grado}(zQ(z)) = d + 1,$$

por tanto ya hemos visto que se cumple para cuando  $\text{grado}(Q) = d$ .

Ahora supongamos que  $\text{grado}(Q) = r < d = \text{grado}(P)$ . Lo primero que podemos probar es que entonces  $\infty$  es un punto fijo. Sean  $P(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0$  y  $Q(z) = b_r z^r + \dots + b_1 z + b_0$ , lo que significa que

$$\begin{aligned} S(z) &= gRg^{-1}(z) = \frac{b_r z^{-r} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0}{a_d z^{-d} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0} \\ &= \frac{z^d(b_r + \dots + b_1 z^{r-1} + b_0 z^r)}{z^r(a_d + \dots + a_1 z^{d-1} + a_0 z^d)} = \frac{z^{d-r}(b_r + \dots + b_1 z^{r-1} + b_0 z^r)}{a_d + \dots + a_1 z^{d-1} + a_0 z^d} \end{aligned}$$

y entonces se puede ver que  $S(0) = 0$ , es decir, 0 es punto fijo de  $S(z)$  demostrando así que  $\infty$  es punto fijo de  $R(z)$ . El resto de puntos fijos de  $R(z)$  van a ser las soluciones de la ecuación  $R(z) - z = 0$ . Esta puede no tener ninguna solución o como mucho  $d$  raíces.

Primero vamos a tratar el caso en el que la ecuación no tenga soluciones. Esto significaría que  $P(z) - zQ(z)$  es una constante  $c$  distinta de 0, por lo que se deberá cumplir que  $\text{grado}(P(z)) = d$ ,  $\text{grado}(Q(z)) = d - 1$ , y

$$P(z) = a_d z^d + \dots + a_1 z + a_0, \quad Q(z) = a_d z^{d-1} + \dots + a_2 z + a_1, \quad c = a_0.$$

Como no tiene soluciones, el punto fijo  $\infty$  debería tener una multiplicidad  $d + 1$ , y entonces se debería cumplir que 0 es punto fijo de  $S(z)$  con multiplicidad  $d + 1$  también. Los puntos fijos de  $S(z)$  deben de ser soluciones de la ecuación

$$z^d Q\left(\frac{1}{z}\right) - z^{d+1} P\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

que simplificando vemos que es igual que

$$-a_0 z^{d+1} = 0$$

y así es evidente que 0 tiene multiplicidad  $d + 1$  como punto fijo de  $S(z)$ .

Para el caso en el que la ecuación  $P(z) - zQ(z) = 0$  tenga  $m \geq 1$  soluciones, usando el conjugado  $S(z)$  podríamos probar de manera análoga que  $\infty$  es un punto fijo de  $R(z)$  con multiplicidad  $(d + 1 - m)$ .  $\square$

Además de los puntos fijos y periódicos, todavía nos queda otro tipo de punto que puede tener un comportamiento especial, y por tanto, debemos conocer.

**Definición 1.6.** Sea una función racional  $R(z)$  de grado  $d$ , vamos a decir que  $w \in \hat{\mathbb{C}}$  es un **valor crítico** si la cardinalidad de  $R^{-1}(w)$  es menor que  $d$ . Un punto  $z_i \in R^{-1}(w)$  que es raíz de  $R(z) - w$  con multiplicidad mayor que 1 se denomina **punto crítico** de  $R(z)$ .

En general, el conjunto de puntos críticos de la función racional  $R(z) = P(z)/Q(z)$  va a estar formado por los ceros de  $R'(z)$ , los polos de  $R(z)$  con multiplicidad mayor que 1 (es decir, las raíces de  $Q(z)$  con multiplicidad mayor que 1), y probablemente  $\infty$ .

Para entenderlo un poco mejor veamos un ejemplo.

**Ejemplo 1.1.** Sea la función racional

$$R(z) = \frac{(z-2)}{(z-1)^2}$$

Esta función  $R(z)$  va a tener como puntos críticos  $z = 1$ , ya que es raíz con multiplicidad 2 de  $Q(z)$ , y  $z = 3$ , al ser raíz de  $R'(z)$ . Estos puntos críticos tendrían como valores críticos a  $1/4$  y  $\infty$  respectivamente. Para estudiar el comportamiento de  $\infty$ , solo tenemos que ver si 0 es punto crítico de  $S(z) = 1/R(1/z)$ . Como  $S(z) = -(z-1)^2/(z(1-2z))$  y  $S'(z) = -(z-1)(-1+3z)/(z^2(1-2z)^2)$ , observamos que 0 no es punto crítico de  $S(z)$  y por tanto  $\infty$  no es punto crítico de  $R(z)$ .

Al hablar del punto fijo, ya hemos mencionado el concepto de convergencia, pero ahora vamos a tratarlo un poco más, centrándonos en el orden de convergencia:

**Definición 1.7.** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión que converge a  $\alpha$ . Decimos que la sucesión  $\{x_n\}$  **converge a  $\alpha$  linealmente** si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right| = q,$$

siendo  $q$  un número tal que  $q \in (0, 1)$ .

Diremos que la sucesión  $\{x_n\}$  **converge a  $\alpha$  con orden  $p$** , para  $p > 1$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C \neq 0.$$

Si el orden de convergencia es 2 se llama **convergencia cuadrática** y si es 3 sería **convergencia cúbica**.

**Proposición 1.2.** Sea  $x_{n+1} = F(x_n)$ , con  $F(x)$  una función de clase  $C^p(I)$  siendo  $I$  un intervalo abierto que contiene a  $\alpha$ . Si se cumple que

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

entonces la sucesión  $\{x_{n+1} = F(x_n)\}$  converge a  $\alpha$  con orden  $p$ .

*Demostración.* Como hemos supuesto que  $x_{n+1} = F(x_n)$  y  $F(\alpha) = \alpha$ , es obvio que

$$x_{n+1} - \alpha = F(x_n) - F(\alpha).$$

Ahora hallando el desarrollo en serie de Taylor de  $F(x_n)$  obtenemos que

$$F(x_n) = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{p+1})$$

y por tanto sustituyendo llegamos a

$$x_{n+1} - \alpha = F(\alpha) + F'(\alpha)(x_n - \alpha) + \dots + \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{p+1}) - F(\alpha).$$

Como sabemos que  $F'(\alpha) = F''(\alpha) = \dots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0$  y  $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$ , podemos simplificar la igualdad obteniendo

$$x_{n+1} - \alpha = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!}(x_n - \alpha)^p + O((x_n - \alpha)^{p+1}) \rightarrow \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^{p+1}} = \frac{F^{(p)}(\alpha)}{p!} + O(x_n - \alpha)$$

y haciendo límite, como  $F^{(p)}(\alpha) \neq 0$ , es fácil ver que se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C \neq 0.$$

□

**Ejemplo 1.2.** Vamos a utilizar el método de Newton para resolver  $f(x) = 0$ , es decir

$$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Si  $\alpha$  es una raíz simple de  $f$ , entonces  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) \neq 0$  y por tanto

- $F(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha.$
- $F'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow F'(\alpha) = 0.$
- $F''(x) = \frac{(f'(x))^2(f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)) - f(x)f''(x)(2f'(x)f''(x))}{(f'(x))^4} \Rightarrow F''(\alpha) = \frac{(f'(\alpha))^3 f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^4} \neq 0.$

Y así, basándonos en el resultado anterior, probaríamos que el método de Newton para raíces simples tiene convergencia de orden 2, también conocida como cuadrática.

**Ejemplo 1.3.** Otro ejemplo sería realizar el caso anterior pero ahora con  $\alpha$  raíz de multiplicidad  $m$  de  $f$  y  $m > 1$ , es decir  $f(x) = (x - \alpha)^m g(x)$  y  $g(\alpha) \neq 0$ . Esto significaría que

$$f'(x) = m(x - \alpha)^{m-1}g(x) + (x - \alpha)^m g'(x) = (x - \alpha)^{m-1} [mg(x) + (x - \alpha)g'(x)]$$



y por tanto usando el método de Newton

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x - \alpha)g(x)}{mg(x) + (x - \alpha)g'(x)} \Rightarrow F(\alpha) = \alpha.$$

Ahora definiendo  $h(x)$  tal que

$$h(x) = \frac{g(x)}{mg(x) + (x - \alpha)g'(x)}$$

y suponiendo que  $h(\alpha) \neq \infty$ , llegamos a que

$$F'(x) = 1 - [h(x) + (x - \alpha)h'(x)] \Rightarrow F'(\alpha) = 1 - h(\alpha) = 1 - \frac{g(\alpha)}{mg(\alpha)} = \frac{m - 1}{m} < 1.$$

Usando la proposición anterior vemos que en este caso, el método de Newton para raíces múltiples tiene convergencia lineal.

Antes de pasar al siguiente apartado, vamos a repasar el concepto de cuenca de atracción, ya que va a parecer varias veces a partir de ahora.

**Definición 1.8.** Sea  $p$  un punto fijo atractor de  $R(z)$ . La **cuenca de atracción de  $p$**  es el conjunto

$$\mathcal{B}(p) = \{z \in \mathbb{C} \mid R^n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p\}.$$

## 1.2. Fractales

Pese a que en la polinomiografía, al visualizar la aproximación de raíces de polinomios complejos, las imágenes obtenidas no tienen porqué ser fractales, ahora vamos a centrarnos un poco en ellos. El término *fractal* (que deriva del latín *fractus*: roto, quebrado, fracturado) fue introducido por **Benoît Mandelbrot** en 1975 en su ensayo “*Les objets fractales: Forme, hasard et dimension*”. Mandelbrot definía los fractales como las figuras geométricas generadas mediante un proceso iterativo, donde la figura geométrica final obtenida se caracteriza por tener una estructura básica que se repite a diferentes escalas.

Dentro de lo fractales unos de los conjuntos más conocidos y estudiados son los conjuntos de Fatou ( $\mathcal{F}$ ) y Julia ( $\mathcal{J}$ ). Estos conjuntos fueron descritos de forma extensa y detallada por **Pierre Fatou** y **Gastón Julia**. Parte de su trabajo fue motivado por un artículo de Sir Arthur Cayley, que publicó un problema en 1879, acerca de las raíces de  $z^3 - 1 = 0$ . A la vez influenciados por otros matemáticos como Cantor, Lebesgue, Borel y Baire, Fatou y Julia estuvieron trabajando durante la década de los años 1910 en la iteración de funciones holomorfas de la esfera de Riemann. Entre dichos trabajos podemos encontrar el artículo de Julia “*Mémoire sur l’iteration des fonctions rationnelles*”, por el que llegó a ganar un premio de la Academia de la Ciencia Francesa.

Iterando las funciones de variable compleja y observando su comportamiento, consiguieron obtener muchas de las propiedades fundamentales de la iteración en el plano complejo. Estos primeros resultados fueron casi olvidados por muchos años y se hicieron populares nuevamente solo en la década de 1980 a través del trabajo de Mandelbrot. Debemos tener muy en cuenta que Julia y Fatou realizaron todo este inmeso progreso sin la ayuda de los ordenadores y la tecnología que poseemos hoy en día, confiando en su imaginación.



*Pierre Fatou (1878-1929)    Gaston Julia (1893-1978)    B. Mandelbrot (1924-2010)*

El conjunto de Fatou se puede entender intuitivamente como aquellos puntos que al ser iterados se comportan igual que sus puntos vecinos cercanos. Por ejemplo, si pensamos en los puntos dentro de la cuenca de atracción de un punto fijo atractor, todos ellos pertenecen al conjunto de Fatou. Entre las distintas características de este conjunto encontramos que  $\mathcal{F}$  es siempre abierto y además es un conjunto completamente invariante, esto quiere decir que si  $z \in \mathcal{F}$  entonces  $f(z) \in \mathcal{F}$  y  $f^{-1}(z) \in \mathcal{F}$ .

El conjunto de Julia es el complementario del conjunto de Fatou. Los puntos de  $\mathcal{J}$  son los puntos inestables o caóticos, es decir, son los que pertenecen a la frontera de diferentes componentes del conjunto de Fatou. Algunas de las propiedades de este conjunto son que es no vacío ( $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ ), cerrado (obvio, ya que es el complementario de un conjunto abierto), y además también cumple que es un conjunto completamente invariante y compacto. Otro de los resultados acerca de este conjunto es el siguiente:

**Proposición 1.3.** *Los puntos periódicos repulsores pertenecen al conjunto de Julia. Es más, forman un conjunto denso en  $\mathcal{J}(f)$*

Este resultado nos permite dar otra definición para el conjunto de Julia pudiendo expresarlo tal que

$$\mathcal{J}(R) = \overline{\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ es un punto periódico repulsor de } R\}}.$$

Dentro de la teoría de iteración de variable compleja, un ejemplo básico es la familia cuadrática, que es definida como

$$Q_c(z) = z^2 + c$$

siendo  $c$  un parámetro complejo. Aunque esta familia de funciones parezca simple, tiene una gran riqueza dinámica y es una de las más estudiadas a finales del siglo xx. Una de sus peculiaridades es su relación con el conjunto de Mandelbrot, que veremos más adelante. Aunque hoy en día la familia cuadrática es una piedra angular de la teoría de los sistemas dinámicos de variable compleja, los primeros trabajos conocidos, realizados por Julia y Fatou, tratan familias más generales, por ejemplo la familia de funciones racionales. Esta familia es muy interesante por algunas de sus propiedades, como por ejemplo el siguiente:

**Proposición 1.4.** *Si  $|c| > 2$ , el conjunto de Julia de  $Q_c$  es un conjunto de Cantor. Además la órbita de  $z = 0$  tiende a infinito, o lo que es lo mismo,  $z = 0$  pertenece a la cuenca de atracción de infinito.*

Para encontrar más propiedades acerca de los conjuntos de Julia y de Fatou, y para ver más características de estos conjuntos en la familia cuadrática consultar [4], [10] y [18].

Ahora vamos a ver algunos ejemplos de conjuntos de Julia realizados con Mathematica

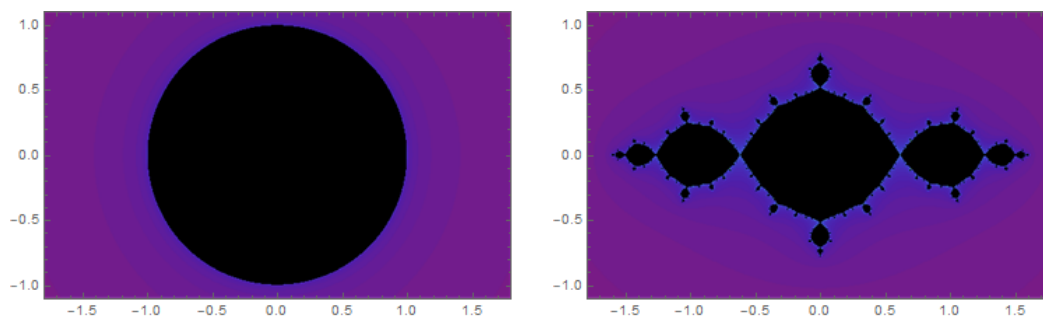


Figura 1.1: El conjunto de Julia para  $z^2$  y el conjunto de Julia para  $z^2 - 1$ .

Para realizar los conjuntos de Julia de la figura 1.1, los comandos utilizados son los siguientes:

```
JuliaSetPlot[z^2, z, ColorFunction -> "Rainbow", PlotRange -> {{-1.8, 1.8}, {-1.1, 1.1}}]
```

[representación de conjunt... [función de color [rango de representación]

```
JuliaSetPlot[z^2 - 1, z, ColorFunction -> "Rainbow", PlotRange -> {{-1.8, 1.8}, {-1.1, 1.1}}]
```

[representación de conjunto de... [función de color [rango de representación]

Si nos fijamos en el primer gráfico de la figura 1.1, que representa el conjunto de Julia de  $R(z) = z^2$ , podemos distinguir las dos componentes de su conjunto de Fatou: la cuenca de atracción de  $\infty$  de color lila, y la cuenca de atracción de 0 de color negro. El conjunto de Julia sería la frontera entre ambas componentes, en este ejemplo sería la frontera de color azul. Esto quiere decir que:

- Si  $|z_0| < 1$  entonces  $z_n = R(z_{n-1}) = \cdots = R^n(z_0) \rightarrow 0$ .
- Si  $|z_0| > 1$  entonces  $z_n \rightarrow \infty$ .
- Si  $|z_0| = 1$  por tanto  $z_0 = e^{i\theta}$  y entonces  $z_n = e^{2^n i\theta}$  que pertenece a la circunferencia de radio 1. Además no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2^n \theta + i \sin 2^n \theta$ .

Para el conjunto de Julia de  $z^2 - 1$ , sucede lo mismo que en el gráfico anterior: las dos componentes del conjunto de Fatou están en lila y negro y el conjunto de Julia sería su frontera, de color azulado.

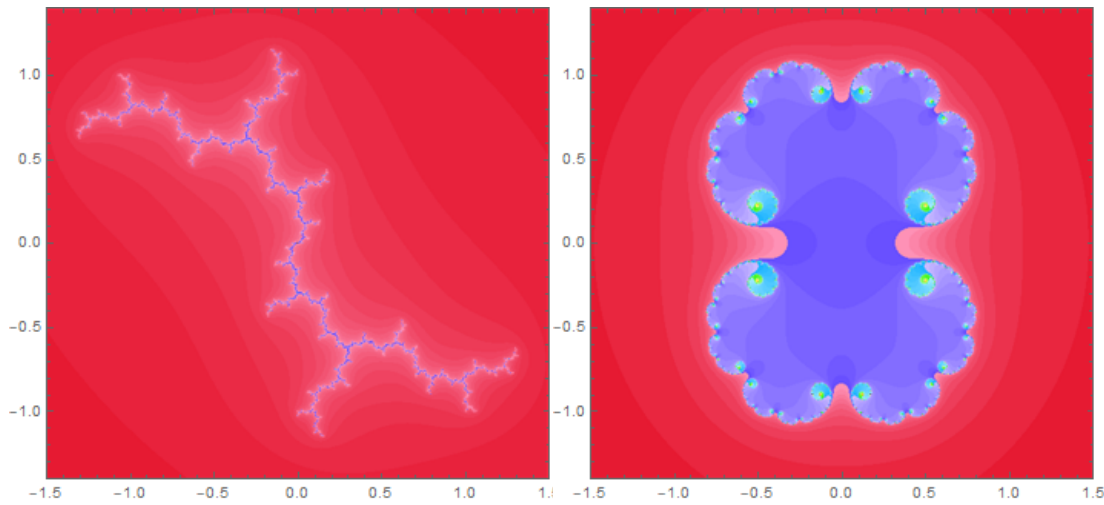


Figura 1.2: El conjunto de Julia para  $z^2 + i$  y el conjunto de Julia para  $z^2 + 0.3$ .

Usando el mismo comando de Mathematica, *JuliaSetPlot*, podemos realizar otros ejemplos de conjuntos de Julia, realizando modificaciones como cambiar el color de las componentes o ampliar o hacer ampliaciones para observar alguna zona concreta. Un ejemplo son los gráficos que hemos hecho en la figura 1.2, para  $z^2 + i$  y  $z^2 + 0.3$ .

Otro de los conjuntos fractales que queremos mencionar es *el conjunto de Mandelbrot*,  $\mathcal{M}$ , el cual fue descubierto en 1978 por R. Brooks y J.P. Matelski pero se popularizó con B. Mandelbrot en 1980. Lo interesante de este conjunto viene por la propiedad de *dicotomía fundamental* que posee el conjunto de Julia. Antes de seguir con esta propiedad y el conjunto de Mandelbrot hay que introducir el concepto de *conjunto lleno de Julia* de un polinomio  $Q_c$ , que podemos entender como el conjunto de todos los puntos cuya órbita es acotada y se representa como  $K_c$ . Es decir el conjunto de Julia de  $Q_c$ ,  $\mathcal{J}_c$ , es la frontera de  $K_c$ .

**Proposición 1.5. La dicotomía fundamental.** *Sea la familia cuadrática  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Entonces solamente existen las dos posibilidades siguientes:*

- *La órbita del punto crítico  $z = 0$  se mantiene acotada y el conjunto lleno de Julia  $K_c$  es conexo.*

- La órbita del punto crítico  $z = 0$  escapa a infinito, y el conjunto lleno de Julia  $K_c$  es un conjunto de Cantor.

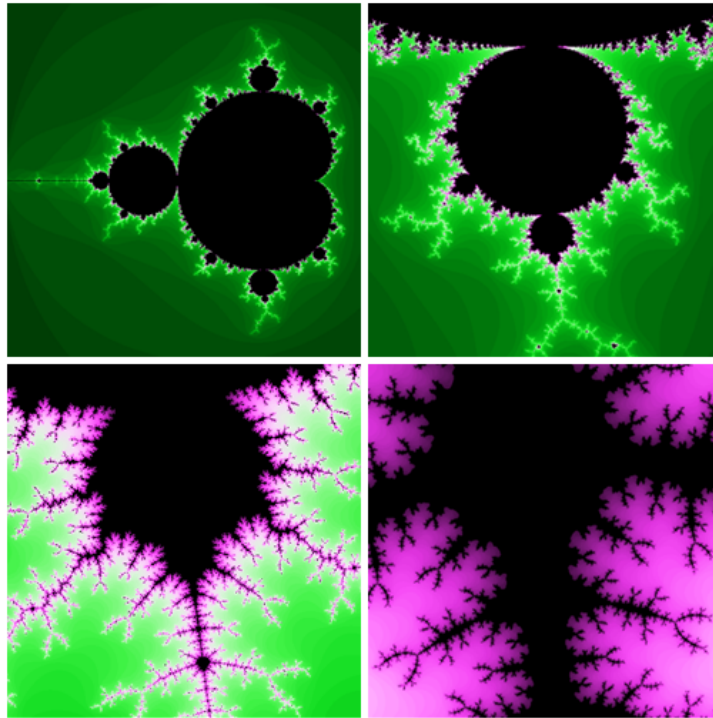


Figura 1.3: El conjunto de Mandelbrot y ampliaciones parciales del mismo.

No vamos a seguir estudiando esta propiedad ya que sería demasiado extenso, pero para leer más sobre esta propiedad y su demostración consultar [4].

La definición de conjunto de Mandelbrot nació al preguntarse para qué valores de  $c$  se cumplía cada una de las dos posibilidades de la dicotomía fundamental. El conjunto de Mandelbrot se define como el conjunto de valores  $c \in \mathbb{C}$  que cumplen que el conjunto lleno de Julia  $K_c$  es conexo y se denota como  $\mathcal{M}$ . Algunas de las características del conjunto son que  $\mathcal{M}$  es cerrado, acotado y conexo.

En la figura 1.3 podemos ver el propio conjunto de Mandelbrot, representado en la primera imagen, y diversas ampliaciones de dicho conjunto donde podemos apreciar su carácter fractal. Estas gráficas las hemos realizado usando Mathematica, pero en este caso lo hemos hecho con el comando *MandelbrotSetPlot*. Para leer más acerca de este conjunto ir a [11].

Podríamos seguir estudiando más acerca de los fractales y los distintos conjuntos fractales que hemos mencionado, pero se trata de un tema demasiado amplio y nos llevaría mucho tiempo. Para encontrar resultados más amplios acerca de los fractales podemos consultar los artículos y libros que hemos ido mencionando a lo largo de esta sección. Además de usar Mathematica para representar estos conjuntos, existen otro tipo de programas y software que nos pueden ser útiles para ello, por ejemplo con Sage [6].



## Capítulo 2

# La Familia Básica de métodos en la resolución de ecuaciones no lineales: Base de la polinomiografía de Kalantari

En este capítulo vamos a estudiar la Familia Básica, definiéndola y analizando alguna de sus propiedades y equivalencias, para entender sus diversas aplicaciones, concretamente en la aproximación de raíces de polinomios. Además de las propiedades algorítmicas y analíticas de esta familia fundamental de funciones iterativas para la resolución de ecuaciones no lineales, otro de los aspectos que la hace tan apropiada para nuestro trabajo es el hecho de que también posee algunas propiedades significantes a la hora de visualizar polinomios. Es por estas interesantes propiedades acerca de la representación de polinomios, por lo que **Bahman Kalantari** convierte a la Familia Básica en el fundamento de la teoría de su polinomiografía y podemos comprobarlo en su libro [9].



*Bahman Kalantari, profesor del departamento de Ciencias de la Computación, Universidad de Rutgers (NJ, EEUU).*

A pesar de la importancia del problema de aproximación de raíces polinómicas en el desarrollo de áreas fundamentales de la ciencia, hoy en día no se considera un problema central en las matemáticas puras o computacionales, e incluso algunos matemáticos llegan a decir que el problema de búsqueda de raíces polinómicas ha llegado a un callejón sin salida. Sin embargo, Kalantari afirma que la polinomiografía ofrece un nuevo enfoque sobre este problema, usando nuevos algoritmos, con la Familia Básica como base, y las nuevas tecnologías. Él defiende el

uso de la polinomiografía, no solo para la visualización de polinomios, sino que también es útil a la hora de observar y estudiar la aproximación de sus raíces y la forma en que la aproximación se lleva a cabo.

Kalantari resalta dos de las principales aplicaciones de la polinomiografía, una siendo su original aportación al arte. Usando los distintos algoritmos de la Familia Básica y un software específicamente creado para estas tareas, se puede llegar a crear diseños similares a otras obras de arte ya conocidas, yendo desde los más complejos hasta los más minimalistas. Otro de sus usos es en el ámbito la docencia. Kalantari cree que la polinomiografía cambiará todo acerca de la aproximación de raíces, no solo desde el punto de vista matemático o científico, sino desde el punto de vista educativo, pudiendo usarlo en las clases de matemáticas, tanto para niños como para estudiantes de nivel universitario, como herramienta para entender mejor los polinomios, así como la visualización de teoremas y resultados relacionados con ellos. Además de esto, la polinomiografía tiene otras aplicaciones, como por ejemplo comparar dos miembros de la Familia Básica, comparando los polinomiografos que obtenemos al usar ambas funciones iterativas.

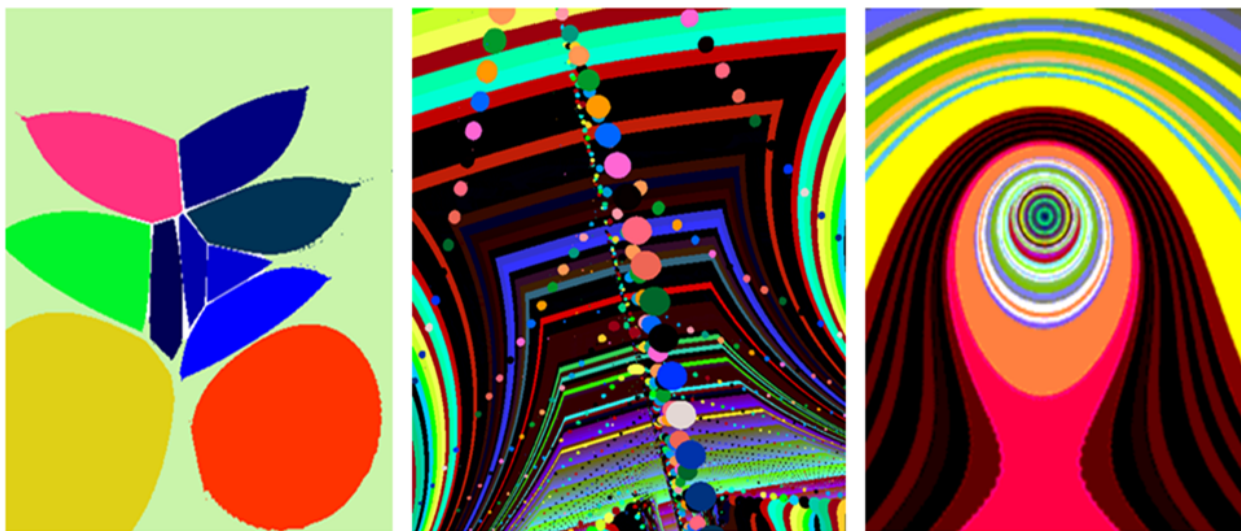


Figura 2.1: Entre las muchas obras realizadas por Kalantari gracias a la polinomiografía podemos encontrar estas tres: “Summer”, “Party on Brooklyn Bridge” y “Mona Lisa”.

En su página web, [www.polynomiography.com](http://www.polynomiography.com), podemos encontrar desde ejemplos de sus polinomiografos, entre los cuales están los de la figura 2.1, hasta aplicaciones para móviles que usan su software para poder realizar estas originales representaciones de polinomios. Este software permite al usuario crear imágenes introduciendo un polinomio, ya sea mediante los coeficientes o la localización de sus raíces. Todo esto junto a la selección de la región del plano que queramos representar y el número de píxeles, nos permitirán crear un número infinito de polinomiografos.



## 2.1. Introducción: la Familia Básica

En la resolución numérica de ecuaciones no lineales existen distintos métodos para hallar las raíces aproximadas de un polinomio dado. Kalantari durante todo su estudio y trabajo acerca de la polinomiografía [9] utiliza la familia fundamental de funciones iterativas conocida como la *Familia Básica*.

La Familia Básica es representada como  $\{B_m(z)\}_{m=2}^\infty$ . Los elementos de dicha familia tienen una interesante fórmula cerrada. Sea un polinomio  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  de grado  $n \geq 2$  y donde los coeficientes  $a_n, \dots, a_1, a_0$  son números complejos. Siendo  $D_0(z) = 1$ , definimos  $D_m(z)$  para cada número natural  $m \geq 1$  de la siguiente forma:

$$D_m(z) = \begin{vmatrix} p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} & \dots & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} & \frac{p^{(m)}(z)}{(m)!} \\ p(z) & p'(z) & \dots & \frac{p^{(m-2)}(z)}{(m-2)!} & \frac{p^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} \\ 0 & p(z) & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & p'(z) & \frac{p''(z)}{2!} \\ 0 & 0 & \dots & p(z) & p'(z) \end{vmatrix}.$$

Ahora para cada  $m \geq 2$ , la siguiente expresión, que es una función iterativa para  $p(z)$ , definirá cada elemento de la familia:

$$B_m(z) = z - p(z) \frac{D_{m-2}(z)}{D_{m-1}(z)}.$$

Entre las diferentes funciones iterativas que forman parte de la Familia Básica, podemos encontrar algunas ya conocidas. Por ejemplo,

$$B_2(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

corresponde al famoso *método de Newton*. Otro elemento significativo de esta familia es

$$B_3(z) = z - \frac{2p'(z)p(z)}{2(p'(z))^2 - p''(z)p(z)},$$

función iterativa conocida como *método de Halley*.

Además la fórmula determinante de  $D_m(z)$  también satisface la relación de recurrencia lineal homogénea:

$$D_0(z) = 1, \quad D_m(z) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} p(z)^{i-1} \frac{p^{(i)}(z)}{i!} D_{m-i}(z).$$

Esta fórmula de recurrencia podemos probarla usando el siguiente lema:

**Lema 2.1.** Sean  $a_0, \dots, a_n$  número complejos arbitrarios con  $n \geq 1$ . Definimos como  $a_i = 0$  cuando  $i > n$ . Sea  $m$  un número natural, definimos  $d_m$  como

$$d_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_0 & a_1 & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Entonces

$$d_m = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_0^{i-1} a_i d_{m-i},$$

donde  $a_0^0 \equiv 1$ ,  $d_0 \equiv 1$  y  $d_i \equiv 0$  si  $i < 0$ . En particular, para cada  $m \geq 1$  observamos que

$$D_m(z) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} p(z)^{i-1} \frac{p^{(i)}(z)}{i!} D_{m-i}(z),$$

con  $D_j = 0$  si  $j < 0$ .

Vemos que con este lema, podemos probar muy fácilmente la fórmula de recurrencia. La demostración de este lema y más propiedades acerca de  $D_m$  los podemos encontrar en [8].

## 2.2. Formulaciones equivalentes

Además de la formulación  $B_m$  que acabamos de ver, que es en la que se basa Kalantari al trabajar en la polinomiografía, podemos encontrar otras formulaciones equivalentes a ésta.

Uno de los ejemplos de familias equivalentes a  $B_m$  es la familia de métodos iterativos  $K_m$  para  $m \geq 2$ , presentada por Householder en 1953, cuya formulación es:

$$x_{k+1} = K_m(x_k) = x_k + (m-1) \frac{(1/f(x_k))^{(m-2)}}{(1/f(x_k))^{(m-1)}}, \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Como ya tenemos definida esta familia de métodos, vamos a enunciar y demostrar la proposición acerca de la equivalencia entre estas dos familias.

**Proposición 2.2.** Sean  $B_m$  y  $K_m$  las familias de funciones iterativas que acabamos de definir. Entonces se cumple que  $B_m = K_m$ .

Para probar esta proposición sobre de la equivalencia de las familias, antes vamos a enunciar y probar varios resultados.

**Teorema 2.3. Fórmula de Leibniz de la  $n$ -ésima derivada.** Sean  $f$  y  $g$  funciones  $n$ -veces derivables. Entonces la  $n$ -ésima derivada del producto  $fg$  se puede expresar como:

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n-i)} g(x)^{(i)}.$$

*Demostración.* Para probar este teorema vamos a hacerlo mediante inducción y empezaremos viendo que es cierto para  $n = 1$ . Por la regla del producto sabemos que  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . Si nos fijamos ahora vemos que

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} f(x)^{(1-i)} g(x)^{(i)},$$

por lo que es obvio que se cumple para  $n = 1$ . Ahora vamos a suponer que se cumple hasta  $n \in \mathbb{N}$ , por lo que para acabar deberíamos probar que se cumple para  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))^{(n+1)} &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n-i)} g(x)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n-i)} g(x)^{(i+1)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} \\ &= \binom{n}{n} f(x)g(x)^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} + \binom{n}{0} f(x)^{(n+1)} g(x) \\ &= \binom{n}{n} f(x)g(x)^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n \left[ \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right] f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} + \binom{n}{0} f(x)^{(n+1)} g(x) \\ &= \binom{n+1}{n+1} f(x)g(x)^{(n+1)} + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)} + \binom{n+1}{0} f(x)^{(n+1)} g(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} f(x)^{(n+1-i)} g(x)^{(i)}. \end{aligned}$$

Y con esto ya estaría probado para  $n + 1$ , y por tanto el teorema.  $\square$

**Lema 2.4.** Para  $n = 1, 2, \dots$  se cumple la siguiente igualdad:

$$D_n(x) = \frac{(-1)^n (f(x))^{n+1}}{n!} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(n)}.$$

*Demostración.* Para la prueba vamos a usar inducción y también utilizaremos la fórmula de recurrencia de  $D_m(x)$ . Empezamos viendo que se cumple la igualdad para  $n = 1$ :

$$D_1(x) = f'(x) = \frac{(-1)(f(x))^2 (-f'(x))}{1} = \frac{(-1)(f(x))^2}{1} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(1)}.$$

Ahora suponemos que es cierto para  $n = 1, 2, \dots, k$ . Antes de continuar tenemos que recordar la fórmula de la derivada  $n$ -ésima de un producto de funciones, que hemos visto en el teorema anterior, ya que la vamos a necesitar para poder seguir con la demostración. Continuamos

con el proceso de inducción probando la igualdad para  $n = k + 1$ :

$$\begin{aligned}
D_{k+1}(x) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (f(x))^{i-1} \frac{(f(x))^{(i)}}{i!} D_{k+1-i}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (f(x))^{i-1} \frac{(f(x))^{(i)}}{i!} \frac{(-1)^{k+1-i}}{(k+1-i)!} (f(x))^{k+2-i} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1-i)} \\
&= \frac{(-1)^k (f(x))^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} (f(x))^{(i)} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1-i)} \\
&= \frac{(-1)^k (f(x))^{k+1}}{(k+1)!} \left( \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (f(x))^{(i)} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1-i)} - f(x) \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1)} \right) \\
&= \frac{(-1)^k (f(x))^{k+1}}{(k+1)!} \left( \left( f(x) \left( \frac{1}{f(x)} \right) \right)^{(k+1)} - f(x) \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1)} \right) \\
&= \frac{(-1)^k (f(x))^{k+1}}{(k+1)!} \left( 0 - f(x) \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1)} \right) \\
&= \frac{(-1)^{k+1} (f(x))^{k+2}}{(k+1)!} \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(k+1)}.
\end{aligned}$$

Y podemos ver que se cumple la igualdad para  $n = k + 1$  y por inducción ya estaría probado para toda  $n = 1, 2, \dots$ .  $\square$

Ahora podemos continuar con la demostración de la proposición 2.2.

*Demostración.* Usando el lema anterior, en concreto sabiendo que

$$D_n(x) \frac{n!}{(-1)^n (f(x))^{n+1}} = \left( \frac{1}{f(x)} \right)^{(n)}$$

llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
K_m(x) &= x + (m-1) \frac{(1/f(x))^{(m-2)}}{(1/f(x))^{(m-1)}} = x + (m-1) \frac{D_{m-2}(x)(m-2)!(-1)^{m-1}(f(x))^m}{D_{m-1}(x)(m-1)!(-1)^{m-2}(f(x))^{m-1}} \\
&= x - f(x) \frac{D_{m-2}}{D_{m-1}} = B_m(x).
\end{aligned}$$

$\square$

Otras de las formulaciones equivalentes que podemos encontrar de la Familia Básica sería la familia  $S_m$  definida tal que

$$S_r(x) = x - u(x) \frac{P_{r-2}(x)}{P_{r-1}(x)}, \quad (r \geq 2),$$

donde las abreviaturas son las siguientes:

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad C_j(x) = \frac{(f(x))^{(j)}}{j! f'(x)}, \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Además  $P_k$  se puede calcular con la siguiente relación recursiva:

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (u(x))^{i-1} C_i(x) P_{k-i}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad C_1 = 1, \quad (k \geq 1).$$

Aunque otra forma de definir las  $P_k$  sería usando determinantes, obteniendo que

$$P_0(x) = 1, \quad P_K(x) = \begin{vmatrix} 1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_m \\ u & 1 & C_2 & \cdots & C_{m-1} \\ 0 & u & 1 & \cdots & C_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Observando podemos ver que se cumple que

$$D_m(x) = (f'(x))^m P_m(x)$$

y así podríamos comprobar que

$$B_r(x) = x - f(x) \frac{D_{r-2}(x)}{D_{r-1}(x)} = x - f(x) \frac{(f'(x))^{r-2} P_{r-2}(x)}{(f'(x))^{r-1} P_{r-1}(x)} = x - u(x) \frac{P_{r-2}(x)}{P_{r-1}(x)} = S_r(x).$$



## Capítulo 3

# Familias de Schröder de primer y segundo tipo

Como ya hemos visto en el capítulo anterior, la familia de las funciones iterativas desarrollada por Kalantari, conocida como la Familia Básica  $B_m$  y la desarrollada por Householder,  $K_m$ , son equivalentes. En este capítulo veremos como hay más familias equivalentes a estas dos, y como en realidad hay dos algoritmos generales, que fueron propuestos por Schröder, y el resto de familias son equivalentes a una de estos dos algoritmos. Para un estudio más exhaustivo acerca del trabajo de Schröder consultar [16] (véase también la traducción [17]). A continuación analizaremos estas dos familias, conocidas como los métodos de primer y segundo tipo, estudiando sus distintos métodos iterativos.

### 3.1. La familia de Schröder de primer tipo

El método de Schröder del primer tipo  $E_m$ , también conocida como familia de Schröder de funciones iterativas de primer tipo, suele ser representada de la forma

$$E_m(x) = x + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \frac{(f(x))^i}{i!} (f^{-1})^{(i)}(f(x)),$$

donde  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$ . Una de las propiedades de esta familia de métodos iterativos la podemos encontrar en el siguiente teorema. Para obtener más información sobre este teorema y su demostración véase [19].

**Teorema 3.1.** *El orden de convergencia del método  $E_j(x)$  es  $j$  ( $j \geq 2$ ).*

Uno de los problemas de esta formulación es la complejidad de calcular  $(f^{-1})^{(i)}(f(x))$  (aunque se puede encontrar la fórmula en el anexo B del libro de Traub [19]). Para solucionar este problema se suele utilizar otra técnica basada en la ecuación “diferencial en diferencia”:

$$E_2(x) = x - u(x) \quad (\text{método de Newton}),$$

$$E_{r+1}(x) = E_r(x) - \frac{u(x)}{r} E'_r(x), \quad (r \geq 2),$$

donde sabemos que

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Usando la relación “diferencial en diferencia” y recordando que

$$C_j(x) = \frac{(f(x))^{(j)}}{j! f'(x)}, \quad (j \geq 2),$$

podemos ir descubriendo los métodos iterativos que se encuentran en esta familia. Por ejemplo, ya sabemos que

$$E_2(x) = x - u(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

por tanto, si queremos hallar  $E_3(x)$  solo tenemos que usar la relación recursiva que acabamos de ver y llegamos a que

$$E_3(x) = E_2(x) - \frac{u(x)E'_2(x)}{2}.$$

Derivando la expresión  $E_2(x)$ , acabamos viendo que

$$E'_2(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = u(x) \frac{f''(x)}{f'(x)}.$$

Ahora usando esto, junto con la definición de  $C_j(x)$ , podemos sustituir en la expresión anterior llegando así a la expresión de  $E_3(x)$  que buscábamos:

$$E_3(x) = E_2(x) - (u(x))^2 \frac{f''(x)}{2f'(x)} = E_2(x) - (u(x))^2 C_2(x).$$

Podemos obtener los primeros  $E_m$  operando de la misma manera. Estas funciones, que hemos calculado con la ayuda de *Mathematica* y que visualizaremos más adelante, son (omitimos las  $x$  para simplificarlos):

$$\begin{aligned} E_3 &= E_2 - C_2 u^2, \quad (\text{método de Chebyshev}) \\ E_4 &= E_3 - (2C_2^2 - C_3) u^3, \\ E_5 &= E_4 - (5C_2^3 - 5C_2 C_3 + C_4) u^4, \\ E_6 &= E_5 - (14C_2^4 - 21C_2^2 C_3 + 6C_2 C_4 + 3C_3^2 - C_5) u^5, \\ E_7 &= E_6 - (42C_2^5 - 84C_2^3 C_3 + 28C_2^2 C_4 + 28C_2 C_3^2 - 7C_5 C_2 - 7C_3 C_4 + C_6) u^6. \end{aligned}$$

Existe cierta controversia acerca de la autoría de  $E_2$  y de la familia  $E_m$  en general, ya que en la literatura rusa  $E_m$  se atribuye a Chebyshev mientras que otros autores adjudican a Euler la deducción de la familia de métodos iterativos y, en concreto, a su *Opera Omnia*, Ser. I, Vol. X. Para leer más acerca de este tema [5].



### 3.2. La familia de Schröder de segundo tipo

Después de haber introducido la familia de métodos iterativos de primer tipo, ahora vamos a tratar la otra familia de la división que realizó Schröder: la familia de Schröder de funciones iterativas de segundo tipo  $S_m$ . Suele representarse como

$$S_m(x) = x - u(x) \frac{P_{m-2}(x)}{P_{m-1}(x)}, \quad (m \geq 2),$$

con las  $u(x)$  y  $C_j(x)$  definidas anteriormente y con

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} (u(x))^{i-1} C_i(x) P_{k-i}(x), \quad P_0(x) = 1, \quad C_1 = 1, \quad (k \geq 1).$$

Como es fácil de observar, esta familia se trata de la familia de métodos que estudiamos en el capítulo 2, en el que ya empezamos a ver que varias familias de funciones iterativas eran equivalentes. A parte de  $S_m$ , ya hemos estudiado la familia de Kalantari  $B_m$  y la familia de Householder  $K_m$ , comprobando que se cumplía la equivalencia  $S_m(x) = B_m(x) = K_m(x)$ . A parte de estas tres familias, hay muchas otras equivalentes que se han ido redescubriendo a lo largo de los años. Para obtener más información sobre las familias véase [14].

Para el método de Schröder del segundo tipo  $S_m$  también existe un teorema homólogo al teorema 3.1 que hemos citado antes:

**Teorema 3.2.** *El orden de convergencia del método  $S_j(x)$  es  $j$  ( $j \geq 2$ ).*

La demostración de este teorema y algunos de sus resultados los podemos encontrar en [9] y [7].

Ahora, sabiendo las expresiones de  $S_m$  y  $P_m$  podemos ir obteniendo los distintos métodos iterativos. Ya sabemos que

$$S_2(x) = x - u(x) \frac{P_0(x)}{P_1(x)} = x - u(x)$$

porque  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = 1$ . Para calcular  $S_3(x)$  procedemos de la misma manera. Para esta función tendremos que calcular antes  $P_1(x)$ , pero ya sabemos que  $P_1(x) = 1$ . También necesitaremos  $P_2(x)$ , y usando la fórmula de  $P_k(x)$  vemos que

$$P_2(x) = C_1(x)P_1(x) - u(x)C_2(x)P_0(x) = 1 - u(x)C_2(x),$$

y por tanto

$$S_3(x) = x - u(x) \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = x - \frac{u(x)}{1 - C_2(x)u(x)}.$$

Si quisiéramos buscar  $S_4(x)$  deberíamos calcular antes  $P_2(x)$ , porque el resto de  $P_k(x)$  necesarias ya las hemos calculado, y mediante la fórmula obtenemos que

$$P_3(x) = C_1(x)P_2(x) - u(x)C_2(x)P_1(x) + u(x)^2 C_3(x)P_0(x) = 1 - 2C_2(x)u(x) + C_3(x)(u(x))^2$$

y sustiuyendo en la fórmula de  $S_m(x)$  llegamos a que

$$S_4(x) = x - u(x) \frac{P_2(x)}{P_3(x)} = x - \frac{u(x)(1 - C_2(x)u(x))}{1 - 2C_2(x)u(x) + C_3(x)(u(x))^2}.$$

De forma análoga, podemos obtener las 6 primeras funciones iterativas de la familia. Estas funciones, que hemos conseguido usando *Mathematica*, son (para abreviar vamos a omitir el argumento de las funciones):

- Método de Newton (orden 2):

$$S_2 = x - u \quad (= E_2).$$

- Método de Halley (orden 3):

$$S_3 = x - \frac{u}{1 - C_2u}.$$

- Método de Kiss de orden 4:

$$S_4 = x - \frac{u(1 - C_2u)}{1 - 2C_2u + C_3u^2}.$$

- Método de Kiss de orden 5:

$$S_5 = x - \frac{u(1 - 2C_2u + C_3u^2)}{1 - 3C_2u + (2C_3 + C_2^2)u^2 - C_4u^3}.$$

- Método de orden 6:

$$S_6 = x - \frac{u(1 - 3C_2u + (2C_3 + C_2^2)u^2 - C_4u^3)}{1 - 4C_2u + (3C_2^2 + C_3)u^2 - (2C_2C_3 + 2C_4)u^3 + C_5u^4}.$$

- Método de orden 7:

$$S_7 = x - \frac{u(1 - 4C_2u + (3C_2^2 + C_3)u^2 - (2C_2C_3 + 2C_4)u^3 + C_5u^4)}{P_6}, \quad y$$

$$P_6 = 1 - 5C_2u + (6C_2^2 + 4C_3)u^2 - (C_2^3 + 6C_2C_3 + 3C_4)u^3 + (C_3^2 + 2C_2C_4 + 2C_5)u^4 - C_6u^5.$$

### 3.3. Polinomiografos de las familias de Schröder

Uno de los principales usos de los polinomiografos es facilitar el estudio visual del comportamiento convergente de los algoritmos de resolución de ecuaciones no lineales. En este caso hemos realizado varios polinomiografos de algunos elementos de las familias de Schröder de primer y segundo tipo para el polinomio  $p(z) = z^3 - 1$ , basados en la noción de cuenca de atracción, para poder ir comparando las distintas funciones de cada familia, y al mismo tiempo, las familias entre ellas.

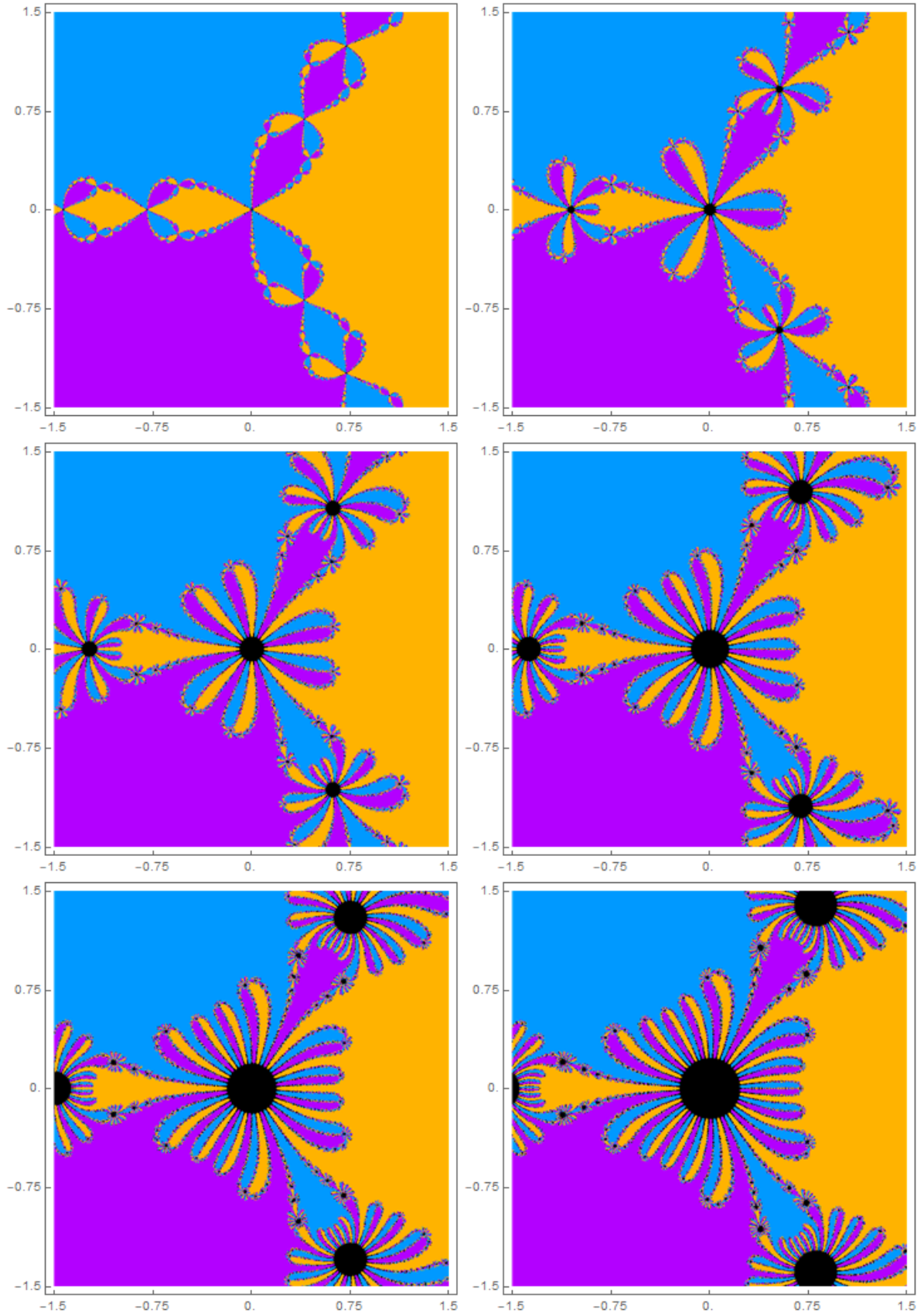


Figura 3.1: Cuencas de atracción para  $E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  y  $E_7$  de  $p(z) = z^3 - 1$ .

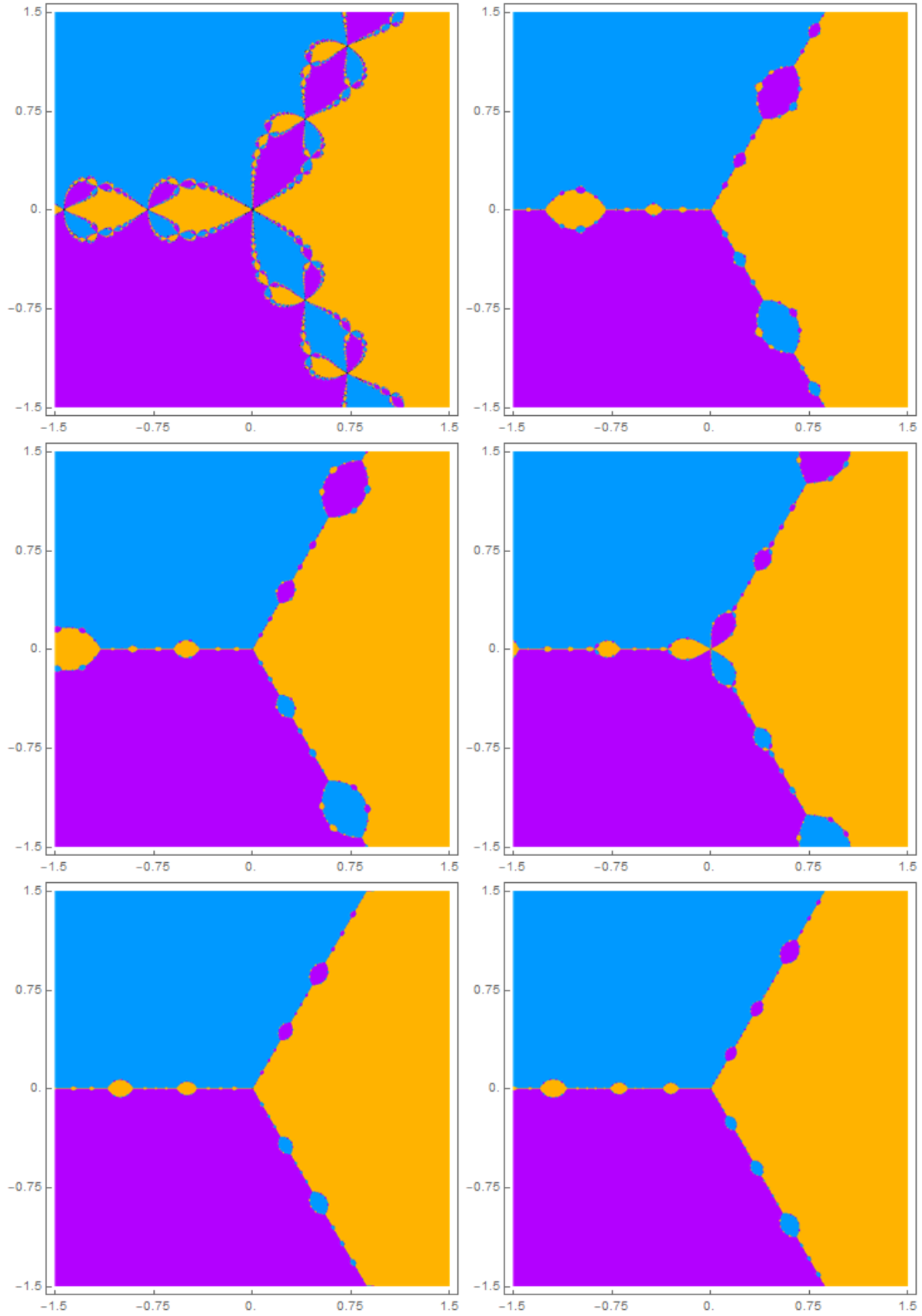


Figura 3.2: Cuencas de atracción para  $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$  y  $S_7$  de  $p(z) = z^3 - 1$ .

Hemos ido evaluando los métodos  $E_j$  y  $S_j$ , para  $j = 2, 3, 4, 5, 6$  y  $7$ , en los distintos puntos de la región del plano complejo determinada por  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -1.5 \leq x \leq 1.5, -1.5 \leq y \leq 1.5\}$ . A cada cuenca de atracción, que va estar relacionada con una de las tres raíces de  $p(z)$ , le asignamos un color diferente. Si el número de iteraciones necesarias para alcanzar la precisión de  $|z_k - \alpha| < 10^{-6}$ , con  $\alpha$  una de las raíces, excede de 25 entonces tratamos el punto inicial como si fuera divergente y lo pintamos de negro.

**Nota 3.1.** *A lo largo de esta sección a los puntos coloreados de negro los llamaremos divergentes para simplificar el estudio, pero estos puntos no son divergentes en realidad, solo que no han convergido con la tolerancia que hemos establecido. Si aumentáramos el número de iteraciones límites o cambiásemos la tolerancia, las regiones de color negro disminuirían o podrían incluso desaparecer. También podrían permanecer en negro si la convergencia no es a ninguna de las raíces.*

Vamos a empezar fijándonos en las representaciones de las primeras funciones de la familia de Schröder de primer tipo, que podemos ver en la figura 3.1. A medida que vamos aumentando el valor de  $j$ , el polinomiografo de  $E_j$  posee más “pétalos” y aparecen más formas fractales en los límites de las cuencas. Además va aumentando el número de puntos negros que represtan los puntos divergentes.

Ahora si nos centramos en las visualizaciones de los elementos de la familia de Schröder de segundo tipo, en la figura 3.2, observamos que el número de figuras fractales y “burbujas” que se forman en las fronteras entre cuencas de atracción va disminuyendo cada vez que aumentamos la  $j$  de las funciones  $E_j$ . Otra de las diferencias entre los métodos de esta familia es que se va reduciendo la cantidad de puntos negros.

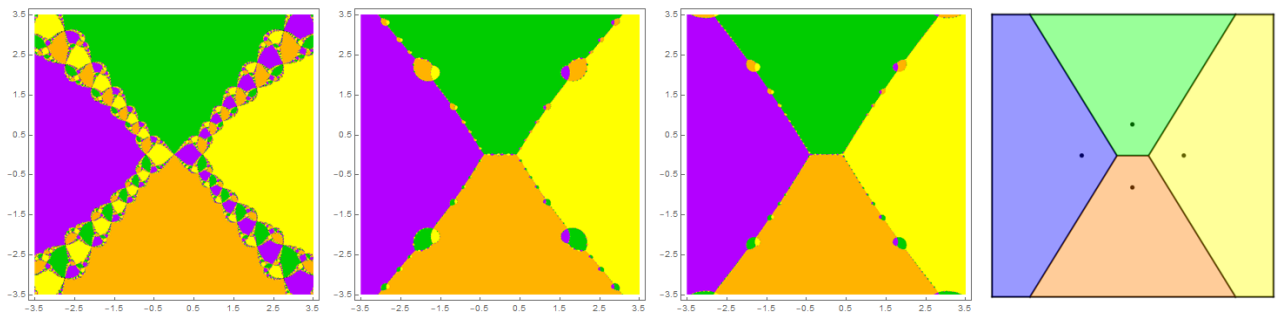


Figura 3.3: *Evolución de las cuencas de atracción hacia las regiones de Voronoi. Polinomiografos de  $S_2$ ,  $S_{10}$  y  $S_{20}$  de  $p(z) = z^4 - 1$  y diagrama de Voronoi de las raíces de  $p(z)$ .*

Si seguimos observando los polinomiografos de la figura 3.2, vemos claramente una de las aplicaciones de la familia  $S_m$  o la Familia Básica de Kalantari: cuando  $m$  es un número elevado, la función  $S_m$  ofrece una aproximación a las regiones de Voronoi de las raíces. Se puerden ver más claramente en la figura 3.3, ya que hemos usado métodos de orden más

elevado como  $S_{10}$  y  $S_{20}$ , y además, podemos compararlos con el diagrama de Voronoi de las raíces, que hemos hecho en Mathematica usando el comando *VoronoiMesh*, y así vemos la gran similitud entre los distintos gráficos.

Ahora comparando las dos familias entre ellas, debemos tener en cuenta que será mejor aquel método que tenga el menor número de puntos divergentes y es preferible que la cuenca de atracción por cada raíz tenga grandes áreas invariables con pocos puntos negros (que ya hemos mencionado al representar los puntos divergentes) y con pocas “burbujas” y figuras fractales en los límites de las cuencas. Aplicando estos criterios a ambas familias, y basándonos en las figuras 3.1 y 3.2, vemos que las cuencas de atracción de los polinomiografos de  $S_j$  tienen un área invariable mayor, menos “burbujas” y fractales, y un número menor de puntos negros en comparación con las cuencas de atracción de los métodos  $E_j$ . Por lo tanto, podemos decir que, el comportamiento convergente de la familia de Schröder de segundo tipo es considerablemente mejor el de la familia de primer tipo. Para ver cómo sería el estudio numérico para estos métodos véase [13].

### 3.4. Código de Mathematica para la obtención de los polinomiografos

Para explicar cómo hemos realizado los polinomiografos de las figuras 3.1 y 3.2, y 3.3, vamos a ir viendo los comandos que hemos usado en Mathematica para obtenerlos, en concreto los del método de Newton para el polinomio  $p(z) = z^3 - 1$ , ya que para el resto es análogo. Para definir estos procedimientos nos hemos basado en [20], adaptándolo a nuestras necesidades como por ejemplo eliminando las intensidades de colores.

```
p[z_] := z^3 - 1; newton[z_] = z - p[z] / p'[z] // Simplify
                                     |simplifica

iterNewton = Compile[{{z, _Complex}},  $\frac{1}{3} \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{3}$ ]
                                     |compila |constante

NSolve[z^3 == 1, z]
|resolvidor numérico

{{z -> -0.5 - 0.866025 i}, {z -> -0.5 + 0.866025 i}, {z -> 1.}}

r1 = 1; r2 = -0.5 - 0.8660254037844386 i; r3 = -0.5 + 0.8660254037844386 i;

rootPosition[z_] :=
Which[Abs[z - r1] < 10.0^(-6), 3,
      |cuál |valor absoluto
      Abs[z - r2] < 10.0^(-6), 2,
      |valor absoluto
      Abs[z - r3] < 10.0^(-6), 1,
      |valor absoluto
      True, 0]
      |verdadero
```

Primero empezamos definiendo el polinomio y el método. Después encontramos las raíces y a partir de ellas definimos *rootposition*, que nos va a permitir saber si un punto se ha

aproximado o no a una raíz con una precisión de  $10^{-6}$ , y si se aproxima a una, también nos indica a cuál.

```
iterColorAlgorithm[iterMethod_, x_, y_, lim_] :=
Block[{z, ct, r}, z = x + y I; ct = 0; r = rootPosition[z];
|bloquea |número i
While[(r == 0) && (ct < lim), ++ct;
|mientras
z = iterMethod[z]; r = rootPosition[z]
];
If[Head[r] == Which, r = 0];
|si |cabecera |cuál
Return[N[r]]
|retorna |valor numérico
]

fractalColores[p_] :=
Switch[IntegerPart[p],
|evalúa... |parte entera
3, CMYKColor[0., 0.3, 1, 0.], (* naranja *)
|color CMYK
2, CMYKColor[1, 0.4, 0., 0.], (* azul *)
|color CMYK
1, CMYKColor[0.3, 1, 0., 0.], (* lila *)
|color CMYK
0, CMYKColor[0., 0., 0., 1.] (* negro *)
|color CMYK
]
```

Definimos *iterColorAlgorithm*, que nos servirá para ir aplicando el método a cada punto y junto con *rootposition* ir viendo si converge a una de las raíces o no, sin pasarse del límite de iteraciones. *fractalColores* lo usaremos para asignar un color al punto que evaluemos según converja a una de las raíces, naranja, azul o lila, o le asignará negro si lo consideramos divergente.

```
ft[min_, max_, pt_, nTicks_] := Block[{taux, j, stepTicks = (max - min) / (nTicks - 1)},
|bloquea
taux = Table[{pt * (j - 1) / (nTicks - 1) + 1, min + (j - 1) * stepTicks}, {j, 1, nTicks}]
|tabla
]

plotColorFractal[iterMethod_, points_] :=
Block[{$Messages = {}},
|bloquea |salida de mensajes
stepx = (xxMax - xxMin) / points, stepy = (yyMax - yyMin) / points,
ArrayPlot[Table[iterColorAlgorithm[iterMethod, x, y, limIterations],
|representa... |tabla
{y, yyMax, 1.00001 * yyMin, -stepy},
{x, xxMin, 1.00001 * xxMax, stepx}],
FrameTicks -> {ft[yyMax, yyMin, points, 5], ft[xxMin, xxMax, points, 5]},
|marcas del marco
PlotRange -> {0, 4},
|rango de representación
ColorFunctionScaling -> False,
|reescala argumentos de la f... |falso
ColorFunction -> fractalColores
|función de color
]
]
```

Por último vamos a definir  $ft$  y  $plotColorFractal$ . El primero nos permite crear una malla de los puntos a los que vamos a aplicar el método, en este caso el de Newton.  $plotColorFractal$  nos va a servir para generar el polinomiografo que buscamos, en la región del plano complejo que queremos (que más tarde definiremos los límites de la región) usando las distintos comandos que hemos ido definido hasta ahora para pintar cada punto del color que le corresponde.

```
limIterations = 25;
xxMin = -1.5; xxMax = 1.5; yyMin = -1.5; yyMax = 1.5;

plotColorFractal[iterNewton, 512]
```

Acabamos definiendo los máximos y mínimos para ambos ejes y ejecutando  $plotColorFractal$  con el método que queramos y el número de puntos que queremos evaluar, esto estará relacionado con el tamaño de los puntos, es decir, cuantos menos puntos elijamos, mayor tamaño tendrán y viceversa. En este caso hemos elegido 512, por eso sale más preciso.

### 3.5. Galería de imágenes

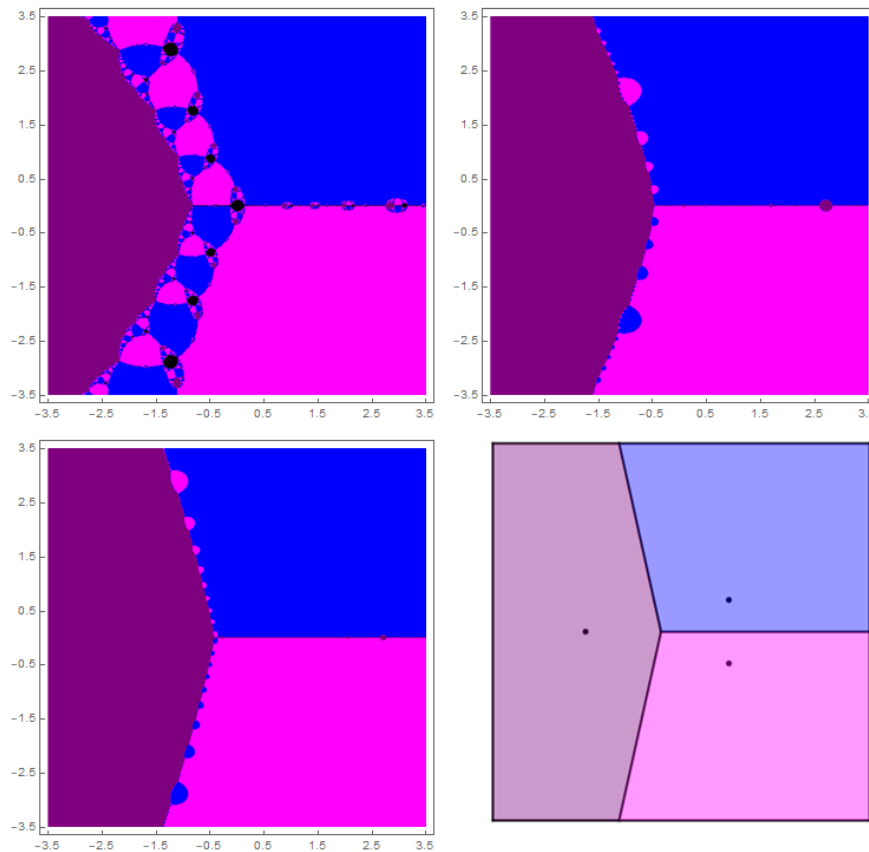


Figura 3.4: Evolución de las cuencas de atracción hacia las regiones de Voronoi. Polinomiografos de  $S_2$ ,  $S_{10}$  y  $S_{20}$  de  $p(z) = z^3 - 2z + 2$  y diagrama de Voronoi de las raíces de  $p(z)$ . Véase la sección 3.3.



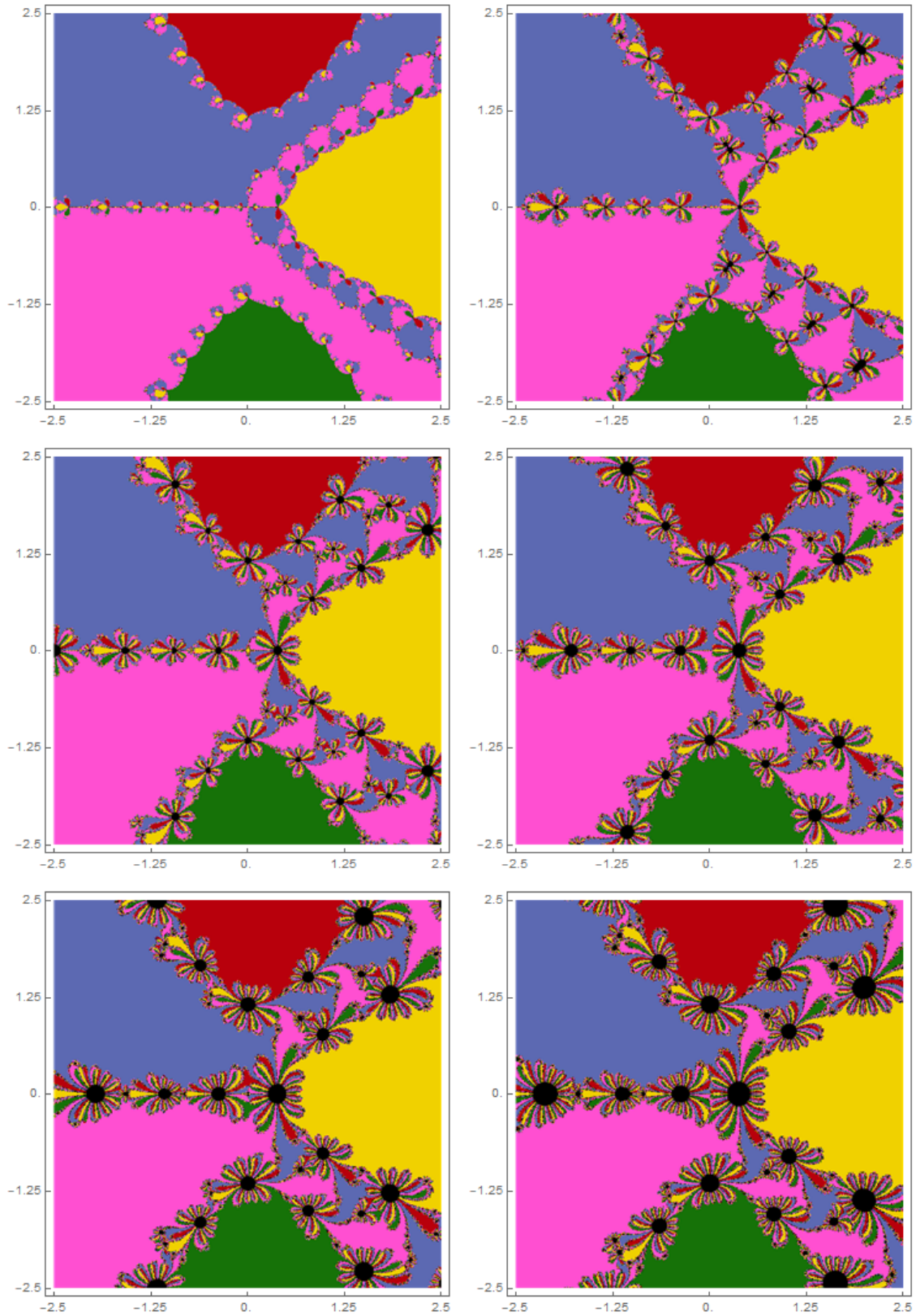


Figura 3.5: Cuencas de atracción para  $E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$  y  $E_7$  de  $p(z) = z^5 + 2z^3 - z - 1$ . Véase la sección 3.3.

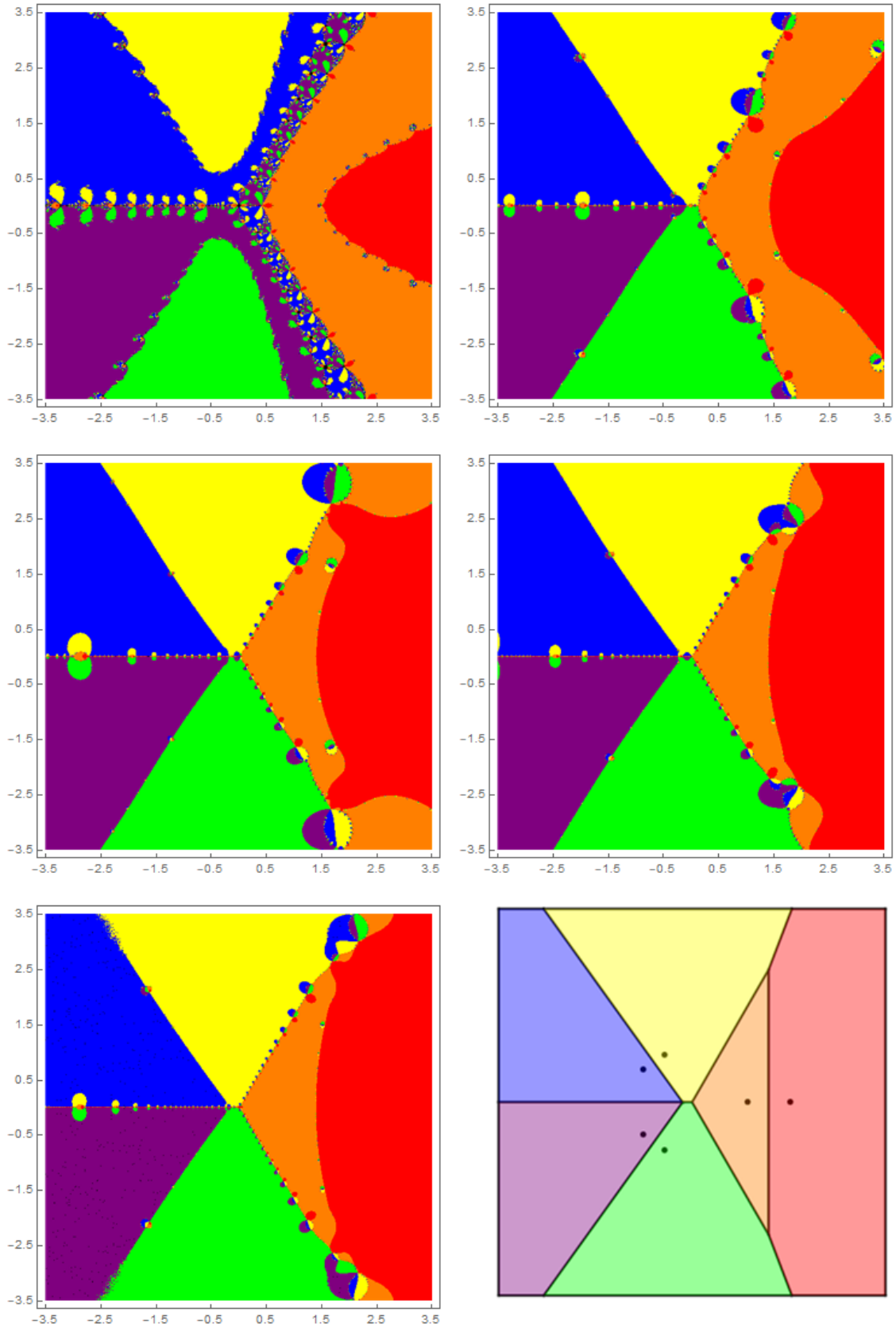


Figura 3.6: Evolución de las cuencas de atracción hacia las regiones de Voronoi. Polinomio-  
grafos de  $S_2$ ,  $S_8$ ,  $S_{14}$ ,  $S_{20}$  y  $S_{25}$  de  $p(z) = z^6 - 2z^4 - 3z^3 + 2z + 2$  y diagrama de Voronoi de  
las raíces de  $p(z)$ . Véase la sección 3.3.

# Capítulo 4

## Otros polinomiografos posibles

En el capítulo anterior hemos visto algunos polinomiografos a partir de las cuencas de atracción de las raíces, y esto nos ha permitido comprobar una de las aplicaciones de la polinomiografía: el estudio comparativo de diversos métodos. En éste, seguiremos realizando representaciones de polinomios, pero en lugar de hacerlos según sus cuencas de atracción, usaremos distintas técnicas. Además iremos comentando los resultados que podemos extraer de estas nuevas visualizaciones.

### 4.1. Polinomiografos según el número de iteraciones

Para continuar con el análisis visual del comportamiento convergente de los distintos métodos iterativos de las familias de Schröder de primer y segundo tipo, ahora nos vamos a centrar en la velocidad de convergencia de las funciones.

**Nota 4.1.** *Para el estudio y representación de la velocidad de convergencia en algunos trabajos usan el concepto de tasa o ratio de convergencia, pero como hay cierta disparidad respecto a su definición, llegándolo a definir igual que al orden de convergencia en algunos casos, vamos a usar el número de iteraciones necesarias para converger a una de las raíces con una precisión de  $10^{-6}$ , inspirándonos en el artículo [2] y en [12], donde podemos encontrar los inicios del uso de los gráficos por ordenador para este tipo de representaciones.*

A cada punto inicial  $z_0$  le asignaremos un color diferente según el número de iteraciones que hayamos realizado hasta llegar a ver que converge a una de a las raíces con la precisión que hemos mencionado antes. Los colores usados son los de la escala de la figura 4.1.

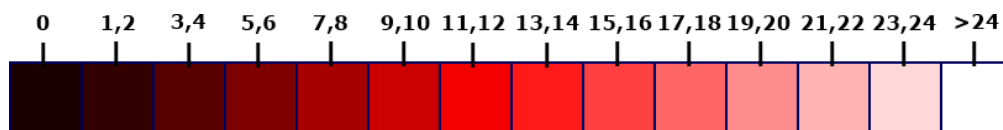


Figura 4.1: Escala de colores, indicando el color que asignamos a cada número de iteraciones.

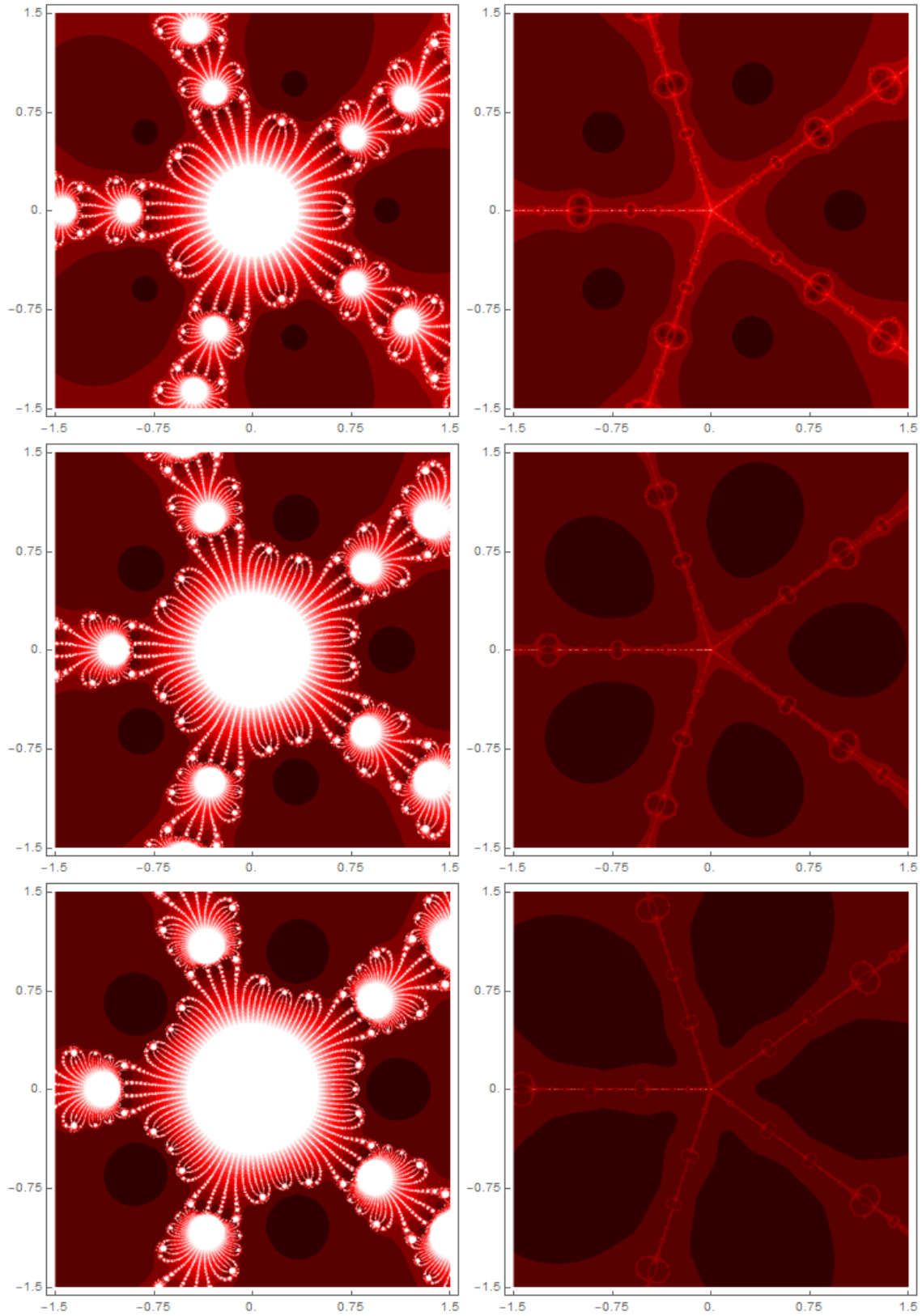


Figura 4.2: Polinomiografos según el número de iteraciones para  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$  a la izquierda y  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  a la derecha, de  $p(z) = z^5 - 1$

Usando los gráficos de la figura 4.2, podemos comparar la velocidad de convergencia de los métodos de las familias de Schröder de primer y segundo tipo. Según la escala de la figura 4.1, el método será mejor cuanto más zonas oscuras tenga. Con este criterio podemos ver que la familia  $E_m$ , para  $m = 3, 4, 5$ , que encontramos a la izquierda, produce más zonas más claras, mientras que la familia  $S_m$ , con  $m = 3, 4, 5$  y a la derecha, se va oscureciendo a medida que aumentamos el valor de  $m$ , sobretodo en las zonas más exteriores de la región del plano complejo que estamos estudiando. Por lo que en este caso, podemos concluir que la familia de métodos  $S_m$  se comporta mejor y es más “rápida” que la familia  $E_m$ .

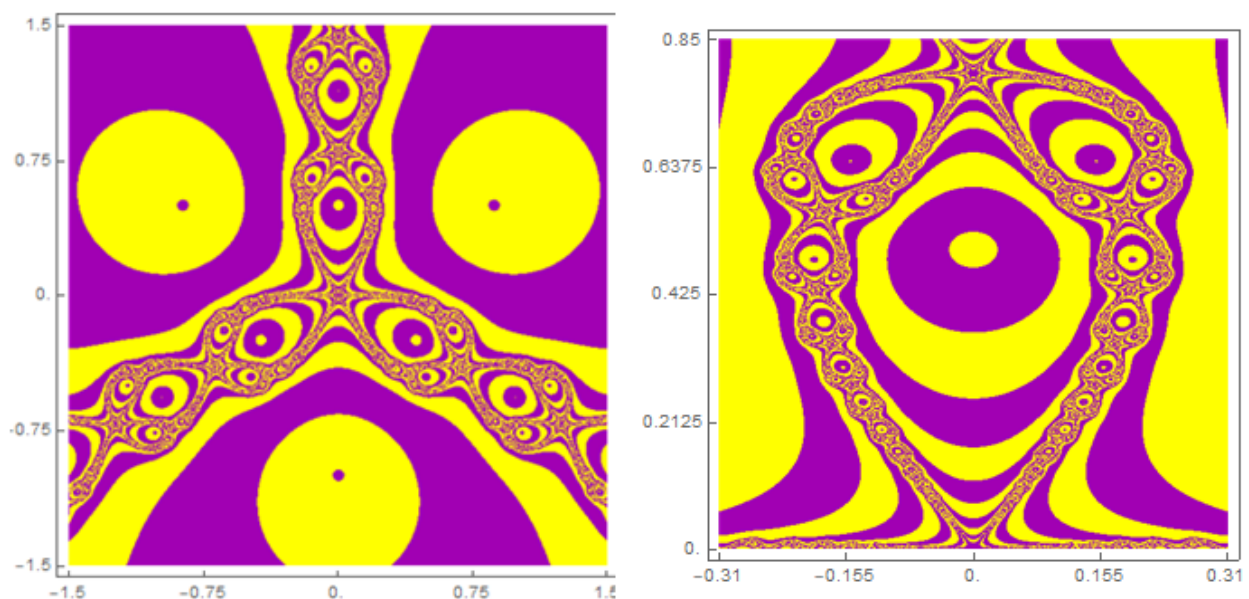


Figura 4.3: Polinomiografo para el método de Newton de  $p(z) = z^3 - i$  con una gama de colores binaria. A la derecha podemos ver la imagen “El payaso”, que podemos encontrar en [12]. La hemos obtenido del polinomiografo de la izquierda, haciendo una ampliación.

Para realizar estos polinomiografos hemos usado los mismos programas que habíamos explicado en el capítulo anterior, pero realizando ciertos cambios, como añadir algunas líneas referentes a las raíces, ya que ahora estamos trabajando con 5 raíces y no con 3 como antes. También hemos modificado *fractalColores* porque ahora tenemos que relacionar el número de iteraciones a un color distinto de la escala.

Como podemos ver a continuación, otro de los cambios fundamentales hechos es en *iterColorAlgorithm*, ya que ahora en lugar de decirnos a que raíz converge, si converge, nos devuelve el número de iteraciones realizadas. Para facilitar la asignación de los distintos colores, hemos agrupado el número de iteraciones de dos en dos. Asignando distintos colores podemos obtener figuras de todo tipo, muy útil para la aplicación artística de la polinomiografía, como por ejemplo la de la figura 4.3, conocida como “El payaso” y que podemos encontrar en [12]. Para obtenerlo hemos ampliado el polinomiografo que encontramos a su izquierda.



```

iterColorAlgorithmNum[iterMethod_, x_, y_, lim_] :=
Block[{z, ct, r}, z = x + y I; ct = 0; r = rootPosition[z];
|bloquea |número i
While[(r == 0) && (ct < lim), ++ct;
|mientras
z = iterMethod[z]; r = rootPosition[z]
];
If[Head[r] == Which, ct = 25];
|si |cabecera |cuál
Return[IntegerPart[(ct + 1) / 2]]
|retorna |parte entera
]

```

## 4.2. Expresar números como polinomiografos

Entre las posibles aplicaciones de la polinomiografía podríamos encontrar una muy interesante: la encriptación de números, como podría ser coger el número de una tarjeta de crédito o el número del documento nacional de identidad (DNI), y transformarlos en imágenes bidimensionales. Cada número sería una imagen y todas distintas entre ellas.

Para ver como podría funcionar esta aplicación, nos hemos planteado como sería representar el número de diferentes DNIs. A cada número  $a_7 10^7 + a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$  lo asociamos con un polinomio  $p(z) = a_7 z^7 + a_6 z^6 + a_5 z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$  y así ahora podemos aplicar lo que hemos visto sobre la polinomiografía. Para representar estos números podríamos usar todo tipo de polinomiografos, como por ejemplo los del capítulo anterior a partir de las cuencas de atracción, pero en este ejemplo vamos a usar los que acabamos de ver, hechos a partir del número de iteraciones. Un ejemplo de esto son las imágenes de la figura 4.4, donde podemos ver las representaciones de distintos números de DNI. Estas imagenes pueden parecer idénticas, ya que solo cambia una cifra del número, pero si nos fijamos bien, podemos ver que son distintas, igual que lo que pasa con las huellas dactilares.

Un problema que podríamos tener en esta hipotética situación, sería con aquellos polinomios que tuvieran las mismas raíces. Es decir, dos polinomios  $r(z)$  y  $s(z)$  que cumplen que  $r(z) = b_7 z^7 + b_6 z^6 + b_5 z^5 + b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = n c_7 z^7 + n c_6 z^6 + n c_5 z^5 + n c_4 z^4 + n c_3 z^3 + n c_2 z^2 + n c_1 z + n c_0 = n(s(z))$  con  $n \in \mathbb{N}$ . El problema es que el polinomiografo que hagamos de estos dos polinomios va a ser el mismo, ya que tienen las mismas raíces. Para solucionarlo vamos a usar un método distinto para cada  $a_7$ : si  $a_7 = 0$  usamos  $S_3$ , si  $a_7 = 1$  usamos  $E_3$ , si  $a_7 = 2$  usamos  $S_4$ , si  $a_7 = 3$  usamos  $E_4$ , y así sucesivamente. Esto es lo que hemos hecho para las imágenes de la figura 4.5, que hemos usado los métodos  $E_3$ ,  $S_4$  y  $E_4$  para cada número respectivamente, y así podemos obtener distintos polinomiografos, aunque sus polinomios tengan las mismas raíces.

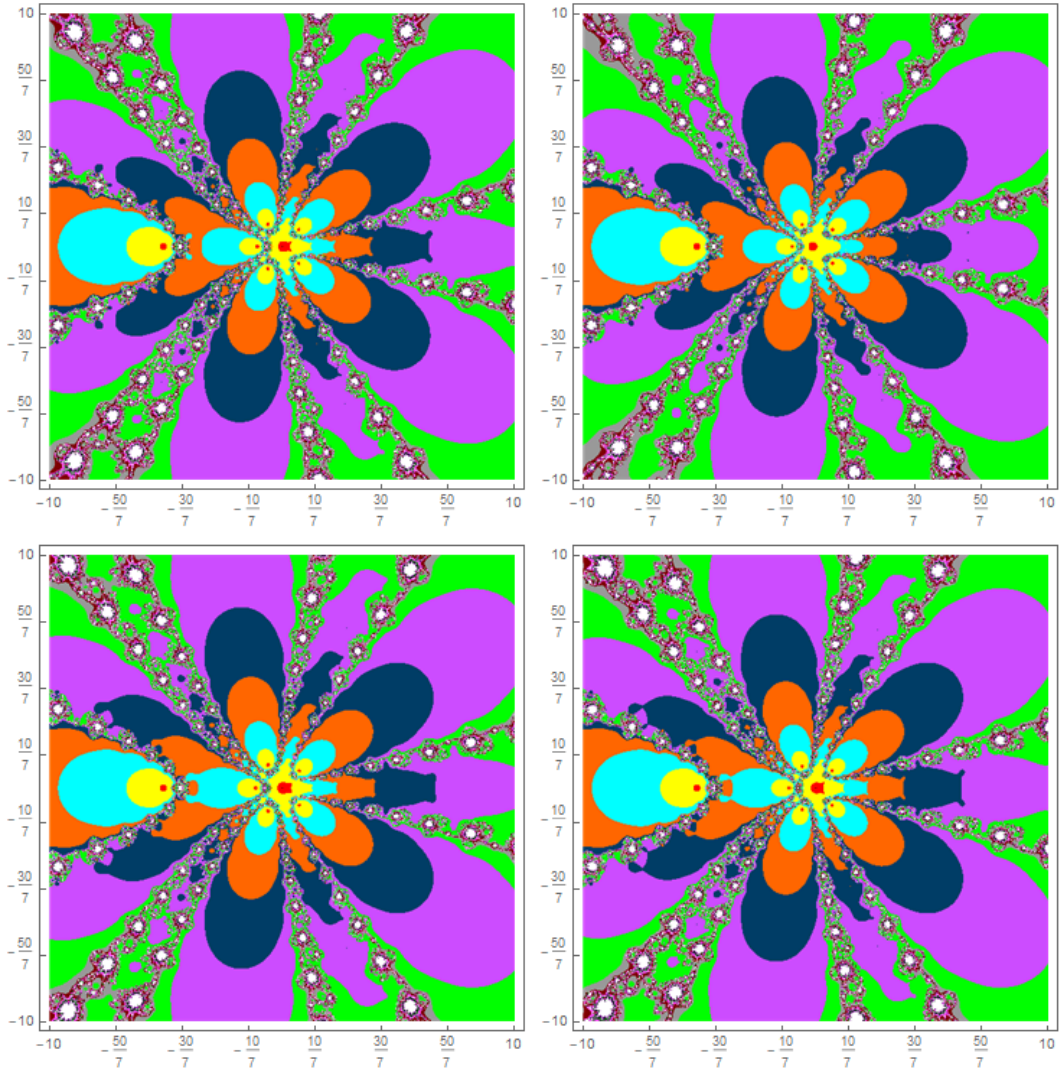


Figura 4.4: Representación con polinomiografos de los números de DNI 16521570, 16521571, 16521580 y 16522570.

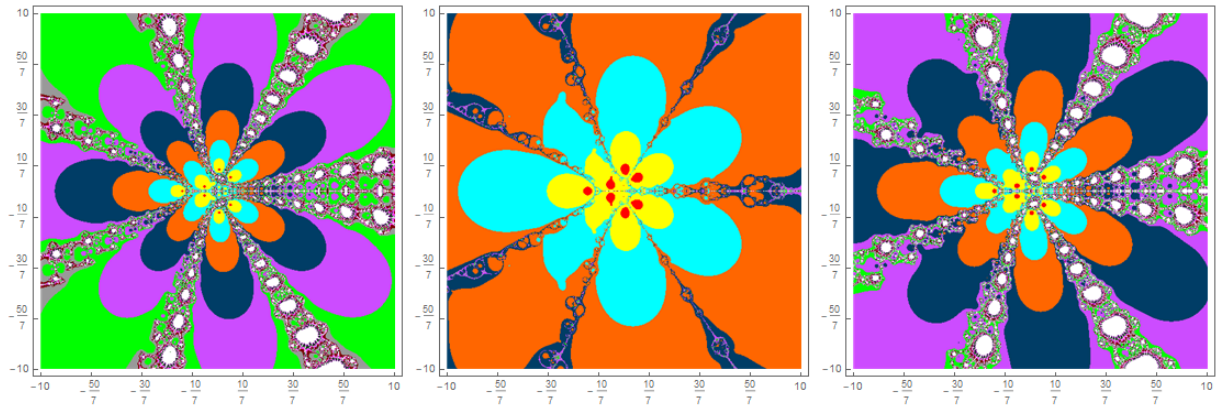


Figura 4.5: Representación con polinomiografos de los números de DNI 12132132, 24264264 y 36396396.

El código de Mathematica para realizar estos polinomiografos es muy similar al de la sección anterior, pero hemos realizado algunos cambios, como el de crear *polinomiiodni* para transformar los números en polinomio. Después con el polinomio definimos el método que vayamos a utilizar, buscamos las raíces y las introducimos en una lista, que usaremos en *rootPosition*. Después cambiamos el resto de código para poder utilizarlo, en este caso hemos cambiado *fractalColores* para conseguir los colores que queríamos.

```
polinomiiodni[a7_, a6_, a5_, a4_, a3_, a2_, a1_, a0_] := a7 * z^7 + a6 * z^6 + a5 * z^5 + a4 * z^4 + a3 * z^3 + a2 * z^2 + a1 * z + a0
p[z_] = polinomiiodni[1, 6, 5, 2, 2, 5, 7, 0]
chebyshev[z_] = z - (1 + (p[z] * p'[z]) / (2 * (p'[z])^2)) * (p[z] / p'[z]) // Simplify
iterChebyshev = Compile[{{z_, _Complex}}, chebyshev[z]]
raices = NSolve[p[z] == 0, z]
lista = z /. raices
```

Otro de los cambios que hemos tenido que hacer, es modificar los límites de la región del plano complejo que vamos a representar, ya que en estos casos, al ser polinomios “aleatorios”, no sabemos dónde van a estar las raíces. Para solucionarlo, cambiamos la zona de representación basándonos en el siguiente teorema, que se atribuye a Gauss aunque fue mejorado por Cauchy:

**Teorema 4.1.** Sea  $p(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$  un polinomio de variable compleja. Entonces se cumplirá que, para cada  $z$  que sea raíz de  $p(z)$

$$|z| \leq 1 + \max \left\{ \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_{n-2}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \right\}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $z$  es solución de  $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$  con  $|z| > 1$ , ya que para otros casos la demostración es trivial. Como  $p(z) = 0$  podemos reescribirlo tal que

$$a_n z^n = -a_{n-1} z^{n-1} - \dots - a_1 z - a_0 \rightarrow z^n = - \left( \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) z^{n-1} - \dots - \left( \frac{a_1}{a_n} \right) z - \left( \frac{a_0}{a_n} \right).$$

Ahora definimos

$$m = \max_{i=0, \dots, n-1} \left\{ \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\}$$

y como sabemos que

$$|z^n| \leq \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| |z^{n-1}| + \dots + \left| \frac{a_1}{a_n} \right| |z| + \left| \frac{a_0}{a_n} \right|$$

llegamos a que

$$|z|^n \leq m[1 + |z| + \dots + |z|^{n-1}].$$



Usando que en la expresión anterior aparece una serie finita podemos reescribirla y obtenemos

$$|z|^n \leq m \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} \rightarrow |z| - 1 \leq m \frac{|z|^n - 1}{|z|^n} = m \left(1 - \frac{1}{|z|^n}\right) \rightarrow |z| - 1 \leq m \rightarrow |z| \leq 1 + m.$$

□

Con este resultado podemos fijar unos límites que sean adecuados para todos los posibles polinomios y definimos la zona que vamos a representar en nuestros polinomiografos de los DNIs como  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10\}$ . Podríamos buscar otros resultados acerca de la teoría de localización y acotación de raíces, como los que podemos encontrar en [1], pero nos extenderíamos demasiado en esta cuestión.

Para terminar de estudiar esta aplicación, lo ideal sería trabajar en crear escáneres capaces de convertir cada imagen en el número orginial y así descryptarla. Para realizar esta conversión el escáner debería ser capaz de reconocer las distintas raíces analizando la representación y recuperar los distintos coeficientes del polinomio identificando el método usado para crear el polinomiografo. Con esto recuperaríamos el polinomio original y por tanto el número que habíamos encriptado.

### 4.3. Plano de parámetros

Para esta última sección y visulización de polinomios vamos a centrarnos en el método de Newton aplicado a ciertas parametrizaciones de los polinomios cúbicos. En realidad, el plano de parámetros, concepto en el que vamos a profundizar a lo largo de esta sección, se puede estudiar para cualquier función racional que dependa de un parámetro. Antes de ponernos a analizar y explicar el tipo de representaciones que vamos a hacer, necesitamos trabajar un poco con el método de Newton y algún otro resultado.

Como ya hemos explicado anteriormente, el método de Newton  $N_{p(z)}$  se define como

$$N_{p(z)}(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}.$$

De esta definición podemos sacar fácilmente que se cumple que

$$N'_{p(z)}(z) = 1 - \frac{p'(z)^2 - p(z)p''(z)}{p'(z)^2} = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}.$$

Fijándonos en la expresión que ha quedado de la derivada de  $N_{p(z)}$ , y en concreto en su numerador, llegamos a ver que los puntos de críticos de  $N_{p(z)}$  son:

- Las raíces de  $p(z)$ .
- Las raíces de  $p''(z)$ . A estos puntos críticos que no son las raíces de  $p(z)$  los llamaremos **puntos críticos libres**.

Estos puntos críticos libres que acabamos de mencionar van a ser esenciales para nuestra representación del plano de parámetros. Otro de los fundamentos del plano de parámetros es el siguiente teorema, cuya demostración podemos encontrar en [3].

**Teorema 4.2. (*Fatou y Julia*)** *La cuenca de atracción inmediata de una órbita periódica (super)atractora, contiene al menos un punto crítico.*

Además de estos resultados, consultando [15], encontramos que se puede probar que el comportamiento dinámico del método de Newton aplicado a cualquier polinomio cúbico es equivalente al del método de Newton aplicado uno de estos tres polinomios:

- $p_\rho(z) = z(z-1)(z-\rho)$ ,
- $p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda+1)z - \lambda$ ,
- $p_\mu(z) = (z^2-1)(z-\mu)$ ,

con  $\rho, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Por tanto ahora resumiremos nuestro estudio de los polinomios cúbicos a estas tres parametrizaciones.

Vamos a empezar con la primera de las parametrizaciones de los polinomios cúbicos:

$$p_\rho(z) = z(z-1)(z-\rho),$$

siendo  $\rho \in \mathbb{C}$  un parámetro y denotamos como  $N_\rho$  a la función iterativa que obtenemos a partir del método de Newton, tal que

$$N_\rho(z) = z - \frac{z(z-1)(z-\rho)}{3z^2 - 2(\rho+1)z + \rho} = \frac{2z^3 - (\rho+1)z^2}{3z^2 - 2(\rho+1)z + \rho}.$$

Por lo que hemos visto antes, sabemos que el conjunto de puntos críticos de  $N_\rho$  van a ser las raíces de  $p_\rho$  y de  $p_\rho''$ , es decir, los puntos críticos van a ser 0, 1,  $\rho$  y  $\frac{\rho+1}{3}$  que es un punto crítico libre.

Como ya hemos dicho los puntos críticos libres son muy interesantes, ya que el estudio de sus órbitas nos da mucha información acerca del comportamiento dinámico de un método. En particular, sirve para determinar si existen órbitas periódicas atractoras para  $N_\rho$ . Para saber si existen estas órbitas debemos estudiar para qué valores de  $\rho$ , la órbita del punto crítico libre,  $N_\rho^n(\frac{\rho+1}{3})$ , es una órbita periódica atractora.

Para ver cuales son los valores que cumplen esta condición vamos a valernos del *plano de parámetros*  $\rho \in \mathbb{C}$ , coloreando cada punto  $\rho$  según como sea la convergencia del punto crítico libre. En este caso, vamos a asignar el color amarillo, rojo o azul a cada parámetro  $\rho$ , cuando la órbita de  $(\rho+1)/3$  converja a 0, 1 o  $\rho$  respectivamente. No todos los valores de este plano de parámetros van a converger a una de estas raíces, así que colorearemos de negro los parámetros  $\rho$  para los que la sucesión  $N_\rho^n(\frac{\rho+1}{3})$  acaba en una órbita periódica.

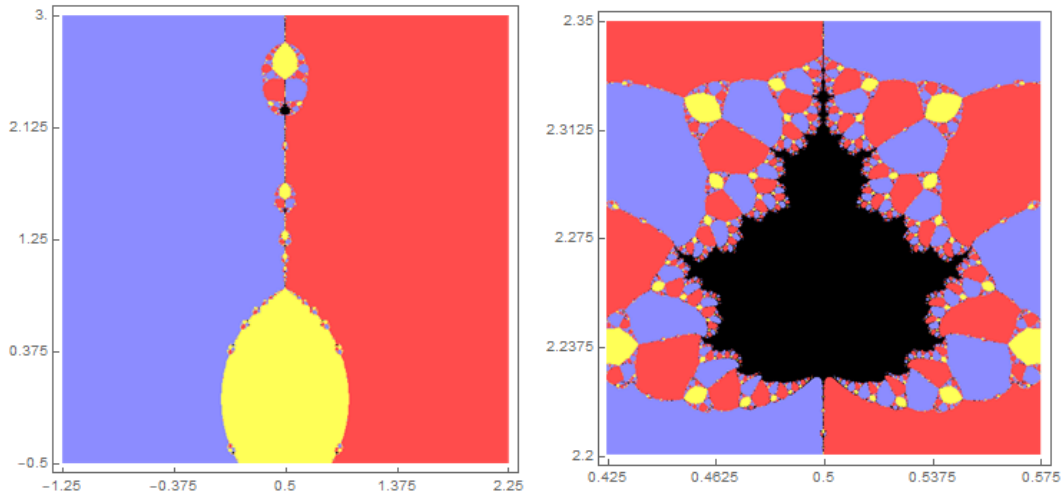


Figura 4.6: A la izquierda podemos ver una visualización del plano de parámetro asociado a  $N_\rho$ . A la derecha hemos hecho una ampliación para ver la región coloreada de negro.

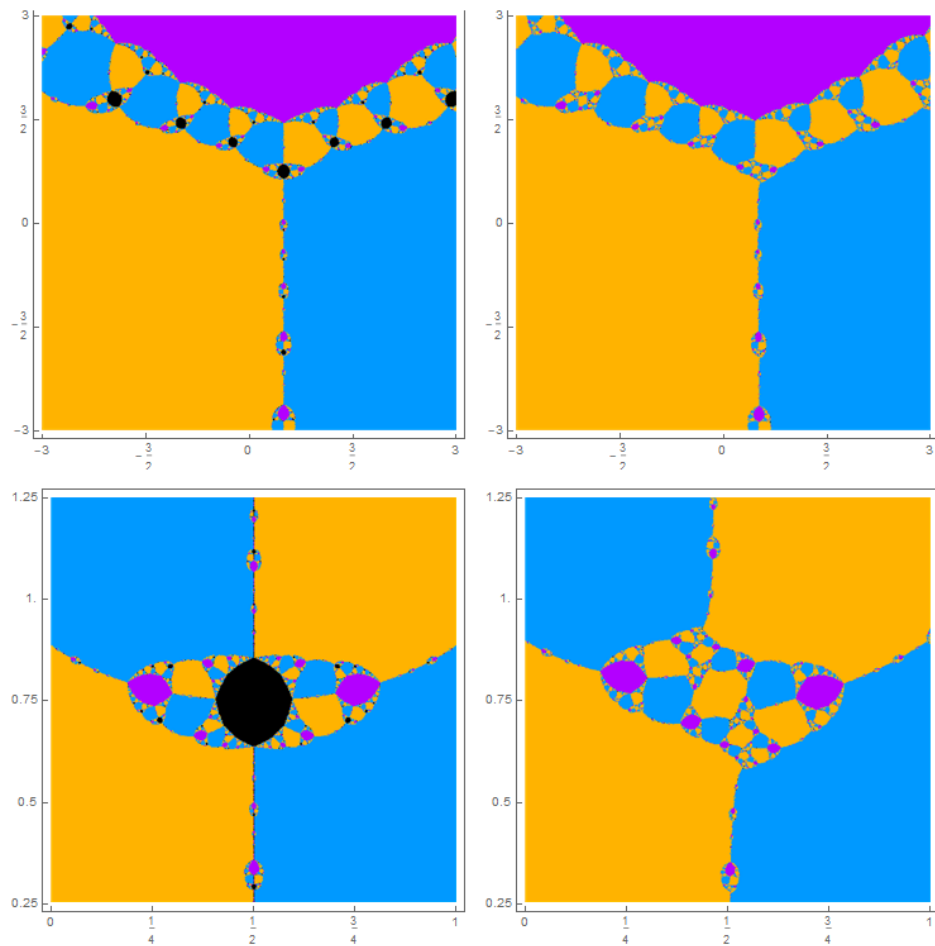


Figura 4.7: Polinomiografos a partir de las cuencas de atracción de  $N_\rho(z)$  para  $\rho = 0.5 + 2.25i$  y  $\rho = 0.44 + 2.3i$ . Abajo podemos ver ampliaciones de zonas en torno a los puntos críticos libres  $(\rho + 1)/3$ .

Podemos ver la representación de este espacio de parámetros en la figura 4.6. En la figura 4.7 hemos comprobado como cogiendo un parámetro coloreado de negro, en este caso  $\rho = 0.5 + 2.25i$ , que lo hemos elegido a partir de la ampliación de la figura 4.6, su polinomiografo según sus cuencas de atracción muestra la órbita periódica atractora que buscábamos. En cambio si cogemos un parametro de otro color, en la figura 4.7 hemos elegido  $\rho = 0.44 + 2.3i$ , esta vez el polinomiografo de  $N_\rho(z)$  aparece sin las regiones negras que aparecen en el otro. Para el caso de  $\rho = 0.5 + 2.25i$ , la órbita del punto crítico libre  $z = (\rho + 1)/3$  es atraída por el ciclo

$$\{0.5 - 0.0978261i, 0.5 + 0.749861i\}.$$

Además de la parametrización  $p_\rho(z)$  que acabamos de ver, otra muy conocida es la definida como

$$p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda + 1)z - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

A partir de esta parametrización, obtenemos la función iterativa del método de Newton para este tipo de polinomios cúbicos denotada  $N_\lambda(z)$  y expresada como:

$$N_\lambda(z) = \frac{2z^3 + \lambda}{3z^2 + \lambda - 1}.$$

Para este caso, como sabemos que los puntos críticos libres de  $N_\lambda(z)$  son las raíces de  $p''_\lambda(z)$ , es fácil ver que la única raíz es  $z = 0$ , y por tanto es el único punto crítico libre asociado a este método de Newton con esta parametrización.

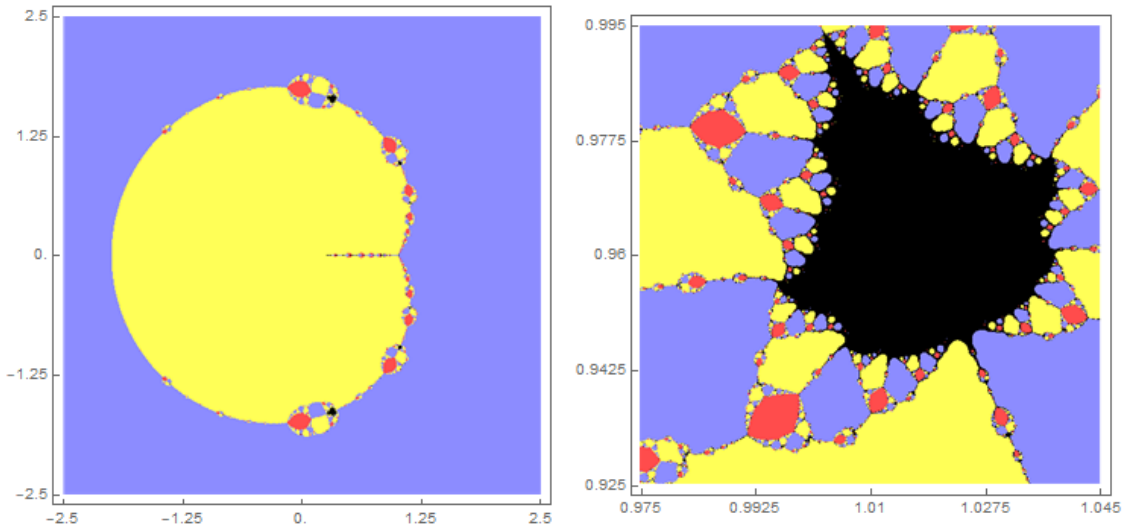


Figura 4.8: A la izquierda podemos ver una visualización del plano de parámetro asociado a  $N_\lambda$ . A la derecha hemos hecho una ampliación para ver una de las regiones coloreadas de negro.

Igual que para la parametrización anterior, en la figura 4.8 hemos representado el plano de parámetros  $\lambda \in \mathbb{C}$ , coloreando de color amarillo, rojo o azul si el punto crítico libre converge a una de las tres raíces de  $p_\lambda(z)$ . Pintamos de negro los valores de  $\lambda$  para los que la sucesión  $N_\lambda^n(0)$  va a parar a una órbita periódica atractora.

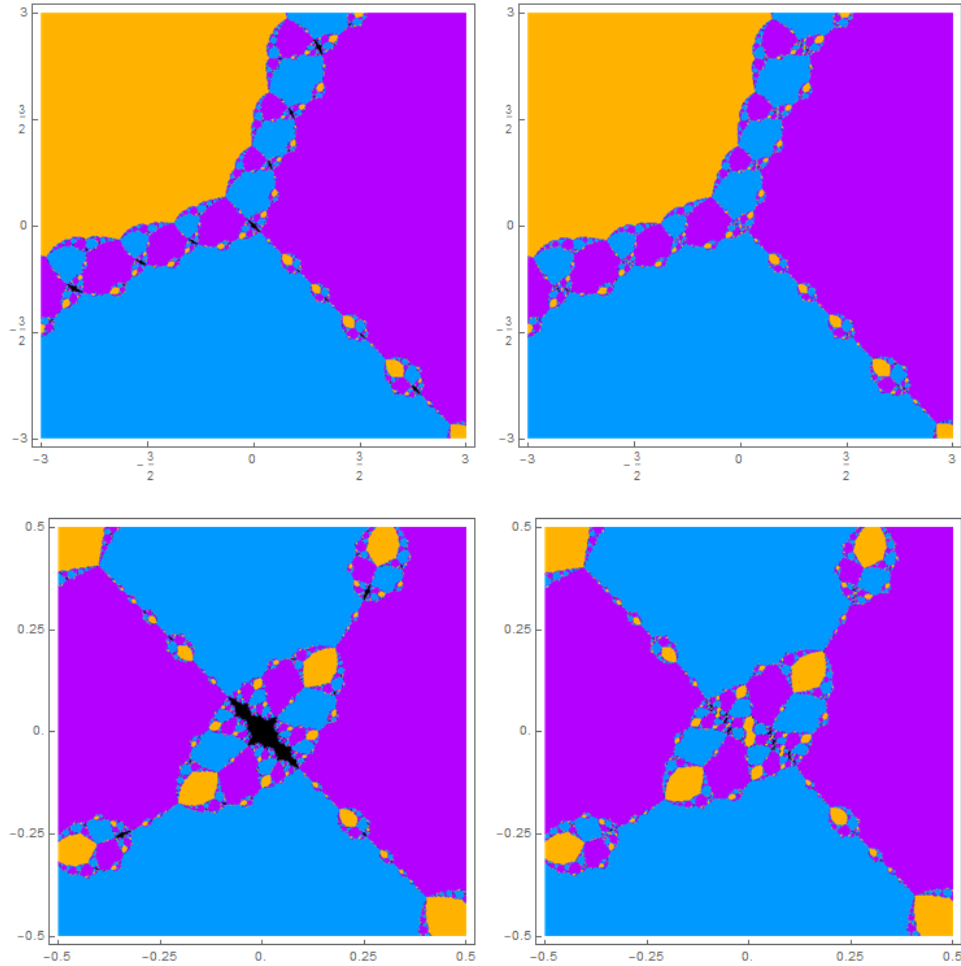


Figura 4.9: *Polinomiografos a partir de las cuencas de atracción de  $N_\lambda(z)$  para  $\lambda = 1.01 + 0.98i$  y  $\lambda = 0.99 + 0.98i$ . Debajo podemos encontrar ampliaciones de zonas en torno a los puntos críticos libres  $z = 0$ .*

De la ampliación del plano de parámetros de la figura 4.8, podemos sacar un parámetro,  $\lambda = 1.01 + 0.98i$ , para el que  $N_\lambda^n(0)$  acaba en una órbita periódica atractora. Esta órbita periódica atractora podemos verla en el polinomiografo de las cuencas de atracción de  $N_\lambda(z)$ , en la primera imagen de la figura 4.9 y más ampliado, entorno al punto crítico libre, en la imagen de abajo a la izquierda, coloreada de negro. Como hemos dicho, esto no pasa siempre. Como podemos ver en las imágenes de la derecha de la figura 4.9, polinomiografos que hemos hecho a partir de parámetros para los que el punto crítico libre converge a una de las raíces de  $p_\lambda(z)$ , en los que no aparecen las regiones de color negro que vemos en los de la izquierda.

Todavía nos queda la última parametrización de los polinomios cúbicos que hemos dicho que íbamos a analizar que es la que podemos ver a continuación:

$$p_\mu(z) = (z^2 - 1)(z - \mu), \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

Aplicando este polinomio al método de Newton obtenemos la función iterativa

$$N_\mu(z) = \frac{2z^3 - \mu z^2 - \mu}{3z^2 - 2\mu z - 1}.$$

En este caso, vemos que el punto crítico libre asociado a  $N_\mu(z)$  es la raíz de  $p'_\mu(z)$ , y como  $p'_\mu(z) = 6z - 2\mu$ , observamos que el único punto crítico libre es  $z = \mu/3$ . De forma análoga a las parametrizaciones anteriores, y como podemos ver en la figura 4.10, hemos representado el plano de parámetros pintando de color amarillo, azul o rojo cada parámetro cuando la órbita del punto crítico libre  $z = \mu/3$  converge a  $\mu$ , 1 o -1 respectivamente. Igual que antes, las zonas coloreadas de negro estarán formadas por los parámetros  $\mu$  para los que la sucesión  $N_\mu^n(\mu/3)$  converge a una órbita periódica.

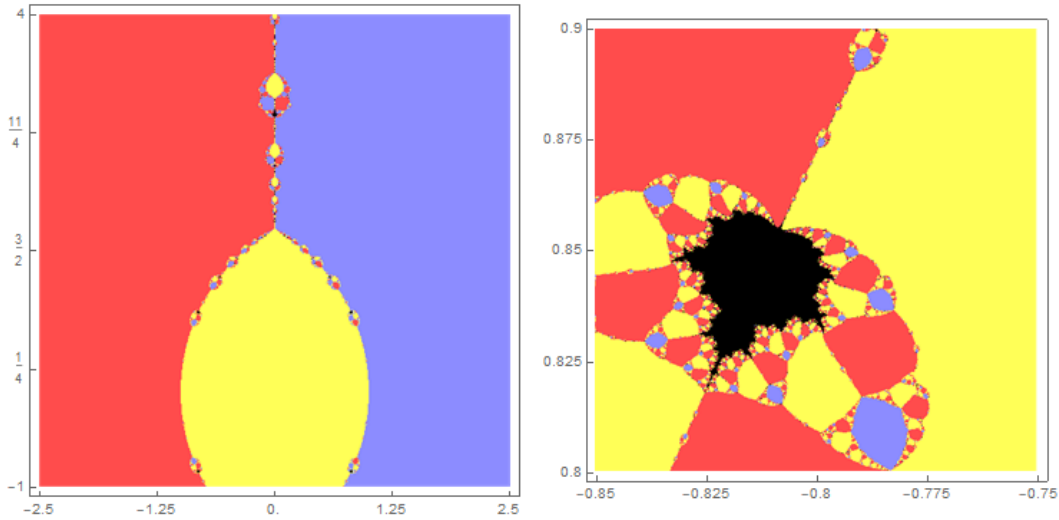


Figura 4.10: A la izquierda podemos ver una visualización del plano de parámetro asociado a  $N_\mu$ . A la derecha hemos hecho una ampliación para ver una de las regiones coloreadas de negro.

Igual que para los casos anteriores, hemos obtenido dos parámetros de la ampliación de la figura 4.10, uno coloreado de negro y el otro no, para así poder comprobar, como vemos en la figura 4.11, que al realizar el polinomiografo de las cuencas de atracción de cada  $N_\mu(z)$ , para el que estaba de negro, aparece la órbita periódica atractora (es decir, las regiones de negro) mientras que para el otro parámetro su polinomiografo no aparecen estas zonas negras. Para un estudio más amplio del plano de parámetros y encontrar más ejemplos sobre éste consultar [15].

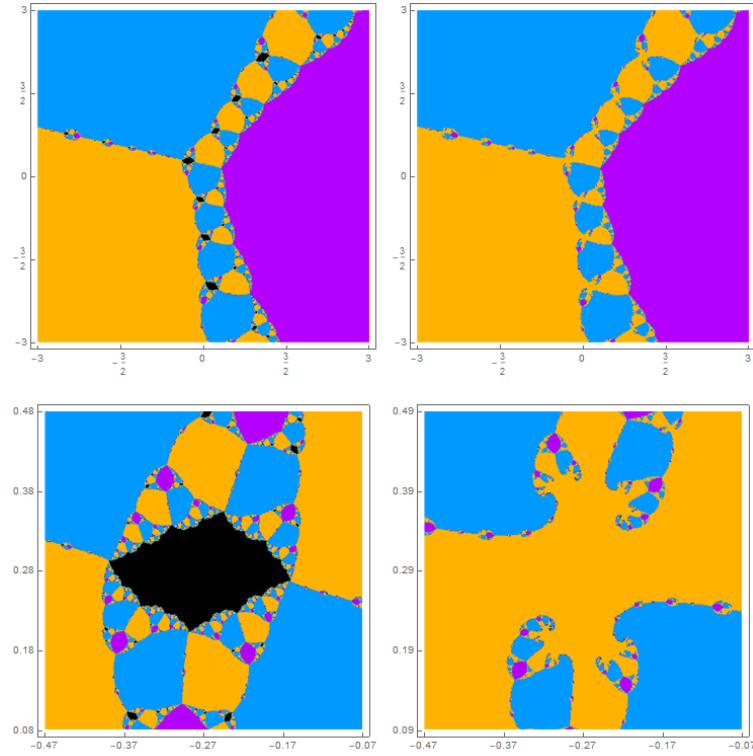


Figura 4.11: *Polinomiografos a partir de las cuencas de atracción de  $N_\mu(z)$  para  $\lambda = -0.81 + 0.84i$  y  $\lambda = -0.81 + 0.87i$ . Debajo podemos encontrar ampliaciones de zonas en torno a los puntos críticos libres  $z = \mu/3$ .*

#### 4.4. Galería de imágenes

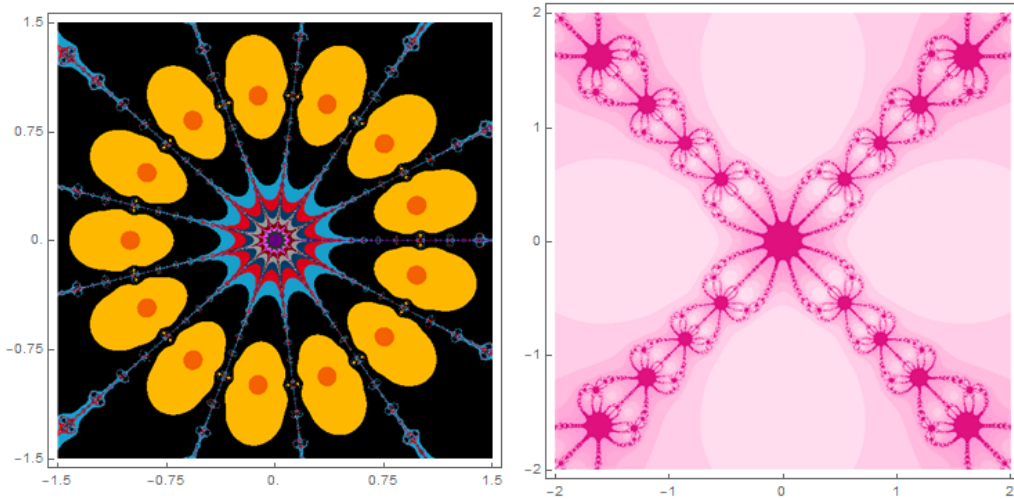


Figura 4.12: *Polinomiografos realizados a partir del número de iteraciones de  $z^{13} + 1$  y  $z^4 - 1$ . Hemos modificado los colores asignados a cada iteración para obtener imágenes más artísticas. Véase la sección 4.1.*

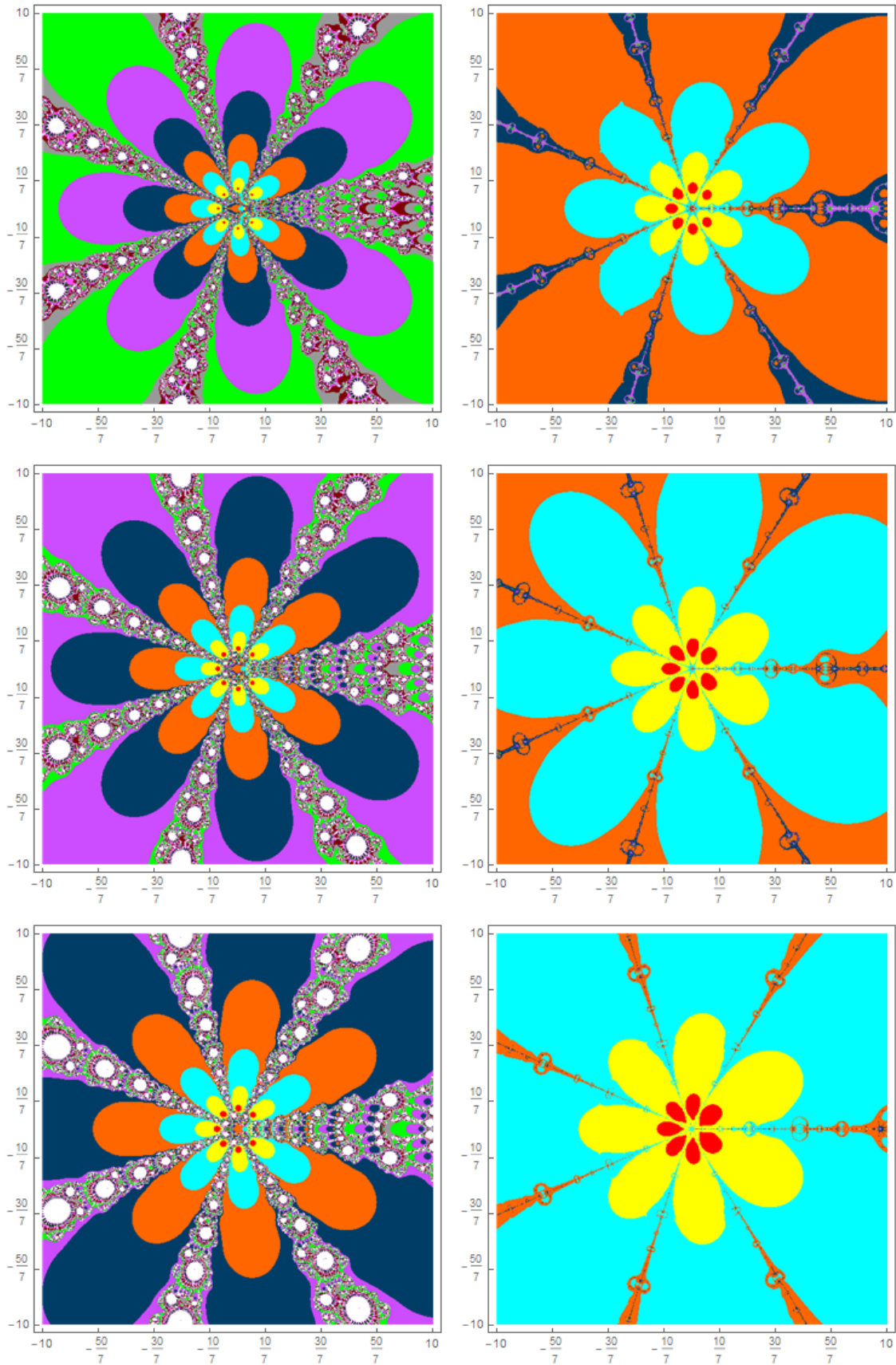


Figura 4.13: Representación con polinomiografos de los números de DNI 11111111, 22222222, 33333333, 44444444, 55555555 y 66666666. Véase la sección 4.2.



# Capítulo 5

## Conclusiones

Para realizar este trabajo hemos partido de una serie de conceptos y resultados previos acerca de la iteración de funciones racionales, los cuales son necesarios para poder analizar la teoría de este tipo de visualización de polinomios. Las primeras observaciones notables nos han surgido con el estudio de los fractales al descubrir algunas de las particulares propiedades que poseen estos conjuntos.

Gracias a esta memoria hemos adquirido otros conocimientos como la existencia de las familias de Schröder, familias de procesos iterativos para resolver ecuaciones no lineales, dependiendo de un parámetro perteneciente al conjunto de los números naturales, en concreto, algunos de sus resultados y equivalencias que desconocíamos. Hemos visto que estas familias de métodos iterativos, que no hemos podido tratar con todo el detenimiento que deseábamos debido a su extensión, presentan unas propiedades muy interesantes. Dichas propiedades las hemos podido comprobar gracias a los polinomiografos que hemos creado para comparar ambas familias.

Por último, pero no menos importante, hemos comprobado algunas de las interesantes y originales aplicaciones de la polinomiografía, aplicaciones que fueron las que nos motivaron a empezar este trabajo acerca de este tipo de representaciones. Solo hemos podido probar unas pocas de todas las posibles que tiene, relacionadas con los propios métodos iterativos y algunas de sus características, como las cuencas de atracción, la velocidad de convergencia o el plano de parámetros, y otras más prácticas como la encriptación de números.

Aún así, con los pocos hallazgos que hemos realizados, comparado con todos los que podríamos hacer si tuviéramos más tiempo, ya hemos podido apreciar todo el potencial que tiene la polinomiografía, no solo para el estudio de aproximación de raíces, sino que también para otros campos como podrían ser la pedagogía o el arte.



# Bibliografía

- [1] C. AFFANE-AJI, N. AGARWAL Y N. K. GOVIL: Location of zeros of polynomials, *Mathematical and Computer Modelling*, **50** (2009), 306–313.
- [2] M. BASTO, T. ABREU, V. SEMIAO Y F. L. CALHEIRO: Convergence and dynamics of structurally identical root finding methods, *Applied Numerical Mathematics*, **120** (2017), 257–269.
- [3] A. F. BEARDON: Iteration of Rational Functions, Springer, Nueva York, 1991.
- [4] N. FAGELLA Y X. JARQUE: Iteración Compleja y Fractales, Vicens Vives, Barcelona, 2007.
- [5] M. GARCÍA OLIVO Y J. M. GUTIÉRREZ: Notas históricas sobre el método de Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales, *Miscelánea Matemática*, **57** (2013), 63–83.
- [6] L. J. HERNÁNDEZ PARICIO, M. MARAÑÓN GRANDES, Y M. T. RIVAS RODRÍGUEZ: Plotting basins of end points of rational maps with Sage, *Tbilisi Math. Journal*, **5** (2012), n.º 2, 71–99.
- [7] A. S. HOUSEHOLDER: The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.
- [8] B. KALANTARI: Approximation of polynomial root using a single input and the corresponding derivative values, Technical Report DCS-TR 369, Department of Computer Science, Rutgers University, New Brunswick, NJ, 1998.
- [9] B. KALANTARI: Polynomial Root-Finding and Polynomiography, World Scientific Publishing Co., Inc. River Edge, NJ, USA, 2008.
- [10] J. MOLERO JIMÉNEZ: Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Cuencas de atracción. Sistemas de Funciones Iteradas. Aplicaciones, Proyecto final de carrera, Universidad Politécnica de Cartagena, 2011. <http://hdl.handle.net/10317/2660>
- [11] H. PEITGEN, H. JÜRGENS Y D. SAUPE: Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer, Nueva York, 2004.

- [12] H. O. PEITGEN, D. SAUPE Y F. V. HAESELER: Cayley's problem and Julia sets, *The Mathematical Intelligencer*, **6** (1984), n.º 2, 11–20.
- [13] M. S. PETKOVIC Y L. D PETKOVIC: Dynamic study of Schröder's families of first and second kind, *Numerical Algorithms*, **78** (2017), n.º 3, 847–865.
- [14] M. S. PETKOVIC, L. D PETKOVIC, D. HERCEG: On Schröder's families of root-finding methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233** (2010), 1755–1762.
- [15] S. PLAZA Y J. M. GUTIÉRREZ: Dinámica del Método de Newton, Universidad de la Rioja, 2013. <http://catalogo.unirioja.es/cgi-bin/abnetopac?TITN=361426>
- [16] E. SCHRÖDER: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, *Math. Ann.* **2** (1870), 317–365.
- [17] G. W. STEWART: On infinitely many algorithms for solving equations, University of Maryland, Institute for Advanced Computer Studies, Department of Computer Science, 1993.
- [18] S. SUTHERLAND: An Introduction to Julia and Fatou Sets, *Fractals, Wavelets, and their Applications. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, **92** (2014), 37–60.
- [19] J. F. TRAUB: Iterative methods for the solution of equations, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1964.
- [20] J. L. VARONA: Graphic and numerical comparison between iterative methods, *The Mathematical Intelligencer*, **24** (2002), n.º 1, 37–46.